บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาการกระทำบนกรุปและสมการเชิงฟังก์ชัน ผู้วิจัยรวมรวบความรู้พื้นฐาน เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐาน
2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐาน

บทนิยาม *การดำเนินการทวิภาค* (Binary Operation) $*$ บนเซต G คือฟังก์ชัน $*: G\times G \to G$ จะเขียน $a*b$ แทน $*(a,b)$

สมมติให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต G และให้ H เป็นเซตย่อยของ G ถ้าการกำกัด (Restriction) ของ $*$ ไปยัง H เป็นการดำเนินการทวิภาคบน H หรือกล่าวได้ว่า สำหรับทุก ๆ $a,b \in H$, $a*b \in H$ แล้ว H มีสมบัติปิดภายใต้ $*$

บทนิยาม *กรุป* (Group) $G = (G,*)$ คือเซต G ซึ่งมีการดำเนินการทวิภาค $*$ บน G และมีสมบัติดังต่อไปนี้

1) $(a*b)*c = a*(b*c)$ สำหรับทุก ๆ $a,b,c \in G$

2) มีสมาชิก $1 \in G$ เป็นเอกลักษณ์ของ G โดยที่สำหรับทุก ๆ $a \in G$

$a*1 = 1*a = a$

3) ให้ $a \in G$ จะมีสมาชิก $a^{-1} \in G$ เป็นตัวผกผัน (Inverse) โดยที่

$a*a^{-1} = a^{-1}*a = 1$

บทนิยาม กรุป $(G,*)$ เป็น*กรุปสลับที่* (Abelian group หรือ Commutative Group) เมื่อ

$$a*b = b*a \qquad \text{สำหรับทุก ๆ } a,b \in G$$

ทฤษฎีบท ให้ G เป็นกรุปภายใต้การดำเนินการทวิภาค $*$

1) เอกลักษณ์ของ G มีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

2) สำหรับทุกๆ $a \in G$ ตัวผกผันของ a จะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

3) $(a^{-1})^{-1} = a$ สำหรับทุก ๆ $a \in G$

4) $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$ สำหรับทุก ๆ $a,b \in G$

(Dummit & Foote, 1999, pp. 18-19)

บทนิยาม ให้ G เป็นกรุปจะเรียกเซตย่อย H ของ G ว่าเป็น*กรุปย่อย* (Subgroup) ของ G เมื่อ H ไม่เป็นเซตว่างและ H เป็นกรุป

ในที่นี้จะใช้สัญลักษณ์ $H \subseteq G$ แทน H เป็นเซตย่อยของ G และ $H \leq G$ แทน H เป็นกรุปย่อยของ G

ทฤษฎีบท ให้ G เป็นกรุปภายใต้การดำเนินการ $*$ และ $H \subseteq G$ จะได้ว่า $H \leq G$ ก็ต่อเมื่อ H ไม่เป็นเซตว่างและสำหรับทุก ๆ $a,b \in H$, $a*b^{-1} \in H$ (Fraleigh, 1989, p. 62)

บทนิยาม ให้ $X = \{1,2,3,\dots,n\}$ เป็นเซต *กรุปสมมาตร* (Symmetric group) S_n คือกรุปของการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด

บทนิยาม ให้ G เป็นกรุป $N \leq G$ และ $g \in G$

เซตร่วมเกี่ยวทางซ้าย (Left coset) gN คือเซต $\{gn \mid n \in N\}$ และ

เซตร่วมเกี่ยวทางขวา (Right coset) Ng คือเซต $\{ng \mid n \in N\}$

ทฤษฎีบท ให้ G เป็นกรุป $N \leq G$ และให้ $a,b \in G$

$a \in bN$ ก็ต่อเมื่อ $aN = bN$

(Dummit & Foote, 1999, p. 81)

บทนิยาม กรุปย่อย N ของกรุป G ภายใต้การคูณเป็น*กรุปย่อยปรกติ* (Normal Subgroup) เมื่อเซตร่วมเกี่ยวทางซ้ายเท่ากับเซตร่วมเกี่ยวทางขวาหรือ $gN = Ng$ สำหรับทุก ๆ $g \in G$ ในที่นี้จะใช้สัญลักษณ์ $N \lhd G$ แทน N เป็นกรุปย่อยปรกติของ G

ทฤษฎีบท สำหรับทุกๆกรุปย่อย N ของกรุป G สมบัติทั้ง 4 ข้อต่อไปนี้จะสมมูลกัน

1) $N \lhd G$

2) $xNx^{-1} = N$ สำหรับทุก ๆ $x \in G$

3) สำหรับทุก ๆ $x, y \in G$ $xy^{-1} \in N$ ก็ต่อเมื่อ $y^{-1}x \in N$

4) สำหรับทุก ๆ $x, y \in G$ $(xN)(yN) = (xy)N$

(Grillet, 1999, pp. 23-26)

ทฤษฎีบท ถ้า $N \lhd G$ และ H เป็นทุก ๆ กรุปย่อยของกรุป G แล้ว $N \cap H \lhd H$

(Dummit & Foote, 1999, p. 89)

บทนิยาม ให้ G เป็นกรุปและ N เป็นกรุปย่อยปรกติของ G *กรุปผลหาร* (Factor Group หรือ Quotient Group) หรือ G/N คือ กรุปของเซตร่วมเกี่ยวของ N กล่าวคือ

$$G/N = \{gN \mid g \in G\}$$

บทนิยาม *สาทิสสัณฐาน* (Homomorphism) ของกรุป G ไปยังกรุป G' คือฟังก์ชัน $\varphi: G \to G'$ โดยที่ $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in G$

บทนิยาม ให้ G เป็นกรุปและ X เป็นเซต เราจะกล่าวว่า G *กระทำบน* X เมื่อมีฟังก์ชัน $*: G \times X \to X$ โดยที่

1) $a*(b*x) = (ab)*x$ สำหรับทุก ๆ $a, b \in G,\ x \in X$

2) $1x = x$ เมื่อ 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G และ $x \in X$

ในที่นี้จะเขียน ax แทน $a*x$ สำหรับทุก ๆ $a \in G$ และ $x \in X$

ให้ X เป็นเซต G เป็นกรุป S_X เป็นกรุปของทุก ๆ การเรียงสับเปลี่ยนบน X และให้ฟังก์ชัน $\phi: G \to S_X$ เป็นสาทิสสัณฐาน สำหรับทุก ๆ $a \in G$ จะแทน $\phi(a)$ โดย λ_a แต่เนื่องจาก ϕ เป็นสาทิสสัณฐานจะได้ว่า $\lambda_a\lambda_b = \phi(a)\phi(b) = \phi(ab) = \lambda_{ab}$ สำหรับทุก ๆ $a, b \in G$

ทฤษฎีบท ฟังก์ชัน $\phi: G \to S_X$ เป็นสาทิสสัณฐานก็ต่อเมื่อกรุป G กระทำบนเซต X โดย $ax = \lambda_a(x)$ เมื่อ $\lambda_a \in S_x$ (Grillet, 1999, p. 97)

บทนิยาม ให้ G เป็นกรุป X เป็นเซตและกรุป G กระทำบน X ให้ $x \in X$ *ออร์บิท* (Orbit) ของ x ภายใต้การกระทำบนกรุปนี้คือเซต $G(x) = \{ax \mid a \in G\} \subset X$

บทนิยาม ให้ G เป็นกรุป X เป็นเซตและกรุป G กระทำบน X ให้ $x \in X$ *สเตบิไลเซอร์* (Stabilizer) ของ x ใน G คือเซต

$$G_x = \{a \in G \mid x = ax\}$$

ทฤษฎีบท ให้ G เป็นกรุปซึ่งกระทำบนเซต X สเตบิไลเซอร์ G_x ของ $x \in X$ เป็นกรุปย่อยของ G (Dummit & Foote, 1999, p. 52)

ทฤษฎีบท ให้ G เป็นกรุปซึ่งกระทำบนเซต X จะได้ว่า

$$G_{xg} = g^{-1}G_x g \quad \text{สำหรับทุก ๆ } x \in X \text{ และ } g \in G$$

(Dummit & Foote, 1999, p. 118)

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปีค.ศ. 2001 Harald Fripertinger ได้ศึกษาหาผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชันโดยวิธีทางพีชคณิตดังต่อไปนี้

กำหนดให้ G เป็นกรุปภายใต้การคูณกระทำบนเซต X และให้ R เป็นกรุปภายใต้การบวก ต้องการหาฟังก์ชัน $x: R \to X$ และฟังก์ชัน $g: R \to G$ ซึ่งค่าของฟังก์ชันทั้งสองสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$g(s+t)x(u) = g(s)x(t+u) \text{ สำหรับทุก ๆ } s, t, u \in R$$

แทนฟังก์ชัน g ด้วยฟังก์ชัน $h: R \to G$ นิยามโดย $h(r) = g(0)^{-1} g(r)$ สำหรับทุก ๆ $r \in R$ และ $h(0) = 1 \in G$ เมื่อ 1 เป็นเอกลักษณ์ใน G จะได้ว่าฟังก์ชัน h สอดคล้องกับสมการ $h(s)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s, u \in R$ สามารถหาฟังก์ชัน $x: R \to X$ และฟังก์ชัน $g: R \to G$ ได้จากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ฟังก์ชัน $x: R \to X$ และ $h: R \to G$ จะสอดคล้องกับสมการ $h(0) = 1 \in G$ และ $h(s)x(u) = x(s+u)$ สำหรับทุก ๆ $s, u \in R$ ก็ต่อเมื่อมี $x_0 \in X$ $S \le G$ $N \triangleleft S$ โดยที่ $N \le G_{x_0}$ และฟังก์ชัน $\Psi: R \to S/N$ เป็นสาทิสสัณฐาน โดยที่ $x(r) = \psi(r)x_0$ และ $h(r) \in \psi(r)$ เมื่อ $r \in R$ และการกระทำของ S/N บนออร์บิท $S(x_0)$ มีนิยามคือ $\overline{\eta} \cdot (kx_0) = (\eta k)x_0$ สำหรับทุก ๆ $h, k \in H$