ขอบเขตแบบใหม่สำหรับการประมาณเรขาคณิตที่มีฟังก์ชัน w

ชนาธิป โสภณพิมล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาสถิติ
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
มกราคม 2561

คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์และคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ได้พิจารณาวิทยานิพนธ์ของ ชนาธิป โสภณพิมล ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาสถิติ ของมหาวิทยาลัยบูรพาได้

คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์

.... อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธาน
(ดร.กิตติมา พฤกภูษณ)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จตุภัทร เมฆพายัพ)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.ไพรัตน์ วงษ์นาม)

คณะวิทยาศาสตร์อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาสถิติของมหาวิทยาลัยบูรพา

.... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เอกรัฐ ศรีสุข)
วันที่ 10 เดือนมกราคม พ.ศ. 2561

การวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนวิทยานิพนธ์/ดุษฎีนิพนธ์ ระดับบัณฑิตศึกษา
จากคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
ประจำปีงบประมาณ 2559

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความกรุณา จาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ที่กรุณาให้คำปรึกษาแนะนำแนวทางที่ถูกต้อง ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยความละเอียดถี่ถ้วนและเอาใจใส่ด้วยดีเสมอมา ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งเป็นอย่างยิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้ด้วย

ขอขอบพระคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้ ซึ่งประกอบด้วย ดร.กิตติมา พฤกฎภูษณ รองศาสตราจารย์ ดร.กิดาการ สายธนู ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จตุภัทร เมฆพายัพ และรองศาสตราจารย์ ดร.ไพรัตน์ วงษ์นาม ที่ได้เสียสละเวลาและกรุณาให้คำแนะนำเพิ่มเติม ในการปรับปรุงวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้ถูกต้องและเสร็จสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

เนื่องจากงานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนวิทยานิพนธ์/ดุษฎีนิพนธ์ ระดับบัณฑิตศึกษาจาก คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา จึงขอขอบพระคุณ ณ ที่นี้ด้วย

สุดท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่อยู่เบื้องหลังความสำเร็จ ซึ่งได้ให้ความช่วยเหลือ สนับสนุนและเป็นกำลังใจตลอดมา และขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคน ที่เป็นกำลังใจในการทำวิทยานิพนธ์จนสำเร็จลุล่วงได้

ชนาธิป โสภณพิมล

57912237: สาขาวิชา: สถิติ; วท.ม.(สถิติ)
คำสำคัญ: วิธีของสไตน์/ ฟังก์ชัน w / ขอบเขตไม่เอกรูป/ การประมาณเรขาคณิต

ชนาธิป โสภณพิมล : ขอบเขตแบบใหม่สำหรับการประมาณเรขาคณิตที่มีฟังก์ชัน w (NEW BOUNDS FOR GEOMETRIC APPROXIMATION WITH W-FUNCTIONS) คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์: คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร,ปร.ด. 40 หน้า. ปี พ.ศ. 2561.

การศึกษาครั้งนี้ใช้วิธีของสไตน์และฟังก์ชัน w หาขอบเขตแบบใหม่ (ขอบเขตไม่เอกรูป) สำหรับประมาณการแจกแจงและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบด้วยการแจกแจงและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มเรขาคณิตในการประยุกต์ใช้ผลลัพธ์ การศึกษาครั้งนี้ใช้ผลลัพธ์ที่หาได้ประมาณการแจกแจงเรขาคณิตไฮเพอร์ลบ การแจกแจงโพลยา และการแจกแจงโพลยานิเสธ เมื่อเปรียบเทียบขอบเขตแบบใหม่ที่ได้จากการศึกษาครั้งนี้กับขอบเขตแบบเดิมใน Teerapabolarn (2011) จะพบว่าขอบเขตแบบใหม่ดีกว่าขอบเขตแบบเดิม นั่นคือ ขอบเขตแบบใหม่สามารถวัดความแม่นยำของการประมาณได้ดีกว่าขอบเขตแบบเดิมทั้งในเชิงทฤษฎีและการประยุกต์ นอกจากนี้ในการวัดความแม่นยำของการประมาณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบด้วยฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มเรขาคณิต ขอบเขตแบบใหม่จะไม่มีข้อจำกัดเกี่ยวกับค่าของ q ที่อยู่ในช่วง $(0,\frac{1}{2}]$ หรือ $(0,\frac{2}{3}]$

57912237: MAJOR: STATISTICS; M.Sc.(STATISTICS)

KEYWORDS: STEIN'S METHOD/ w-FUNCTION/ NON-UNIFORM BOUND/ GEOMETRIC/ APPROXIMATION

CHANATIP SOPONPIMOL: NEW BOUNDS FOR GEOMETRIC APPROXIMATION WITH W-FUNCTIONS . ADVISORY COMMITTEE: KANINT TEERAPHABOLARN, Ph.D. 40 P. 2018.

This study uses Stein's method and w-functions to determine new bounds, non-uniform bounds, for approximating the distribution and cumulative distribution function of non-negative integer-valued random variable by the distribution and cumulative distribution function of geometric random variable. For applications, this study uses the obtained results to approximate hypergeometric, Pólya and negative Pólya distributions. By comparing the new bounds of this study and the old bounds in Teerapabolarn (2011), it is found that the new bounds are better than the old bounds, that is, the new bounds can be measured the accuracy of the approximation to be better than the old bounds both theoretical and applications. In addition, measuring the accuracy of the approximation of the cumulative distribution function of non-negative integer-valued random variable by the cumulative distribution function of geometric random variable, the new bounds have no the restriction of the value of q that are in $(0,\frac{1}{2}]$ or $(0,\frac{2}{3}]$.

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การแจกแจงเรขาคณิต (Geomatric distribution) เป็นการแจกแจงวิยุต (Discrete distribution) แบบหนึ่งที่เป็นการแจกแจงกรณีพิเศษของการแจกแจงทวินามนิเสธ (Negative binomial distribution) ที่มีพารามิเตอร์ $r\left(r \in \mathbb{N}\right)$ และ $p\left(p \in (0,1)\right)$ เมื่อ $r=1$ จะเรียกการแจกแจงทวินามนิเสธนี้ว่าการแจกแจงเรขาคณิตที่มีพารามิเตอร์ p ซึ่งอาจหมายถึง การแจกแจงของจำนวนความล้มเหลว (Failure) ก่อนเกิดความสำเร็จ (Success) ครั้งแรกในลำดับการทดลองย่อยแบร์นูลลีที่เป็นอิสระต่อกัน (Independent Bernoulli trials) โดยความสำเร็จและความล้มเหลวที่เกิดขึ้นในแต่ละการทดลองย่อยมีค่าความน่าจะเป็นเท่ากับ p และ $q=1-p$ ตามลำดับ

การแจกแจงเรขาคณิตสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในหลายด้าน เช่น อุตสาหกรรมสำหรับการตรวจสอบสินค้าของการผลิต ด้านระบบสินค้าคงคลัง และด้านการพยากรณ์สำหรับตัวแบบทางอุตุนิยมวิทยา (Meteorological model) เป็นต้น

ให้ G แทนตัวแปรสุ่มเรขาคณิตที่มีพารามิเตอร์ $p\left(p \in (0,1)\right)$ ซึ่งมีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นดังนี้

$$p_G\left(x\right) = pq^x \quad , x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{1.1}$$

โดยที่ค่าคาดหมายและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม G คือ $E\left(G\right) = \dfrac{q}{p}$ และ $Var\left(G\right) = \dfrac{q}{p^2}$ ตามลำดับ

เป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปว่าการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบสามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงวิยุตบางการแจกแจง ได้แก่ การแจงแจงปัวซง (Poisson distribution) การแจกแจงทวินาม (Binomial distribution) และการแจกแจงทวินามนิเสธ เมื่อมีการกำหนดพารามิเตอร์ของการแจกแจงให้มีความสอดคล้องกัน ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสมของการแจกแจงที่นำมาใช้ประมาณ ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงสามารถประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบบางการแจกแจงได้ด้วยการแจกแจงเรขาคณิต ถ้าหากการแจกของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบเข้าใกล้การแจกแจงเรขาคณิตมากกว่าการแจงแจกอื่น ๆ (ภายใต้การกำหนดเงื่อนไขที่มีความสอดคล้องกัน) งานวิจัยเรื่องแรกของการศึกษาการประมาณการแจกแจง

ของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบด้วยการแจกแจงเรขาคณิต คือ งานวิจัยของ Barbour and Grübel (1995) ในช่วงเวลาต่อมายังมีงานวิจัยอีกหลายเรื่องที่เกี่ยวข้องกับการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบด้วยการแจกแจงเรขาคณิต แต่งานวิจัยเหล่านั้นไม่มีเรื่องใดที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบหนึ่งตัวแปร ในเวลาต่อมา Teerapabolarn (2011) ได้นำเสนอการประมาณเรขาคณิตสำหรับตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบหนึ่งตัวแปรดังนี้

ให้ X แทนตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบที่มีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น $p_X(x)>0$ สำหรับทุก $X\in S(X)$ เมื่อ $S(X)$ คือ เซตของค่าตัวแปรสุ่ม X ที่มีค่าคาดหมาย $\mu=E(X)$ และความแปรปรวน $\sigma^2=Var(X)$ ในการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ด้วยการแจกแจงเรขาคณิต ซึ่ง Teerapabolarn (2011) ได้ใช้วิธีของสไตน์ (Stein's method) และฟังก์ชัน w หาขอบเขตเอกรูป (Uniform bound) และขอบเขตไม่เอกรูป (Non-uniform bound) ของการประมาณ ในกรณีของขอบเขตเอกรูปมีสองรูปแบบ รูปแบบแรก คือ

$$\sup_{A\subseteq\mathbb{N}\cup\{0\}}\left|P(X\in A)-P(G\in A)\right|\le\sum_{k\in S(X)\setminus\{0\}}\frac{\left|(k+1)q-p\sigma^2w(k)\right|p_X(k)}{k}+\left|\frac{q}{p}-\mu\right|\left[1-p_X(0)q\right] \tag{1.2}$$

และถ้า $\frac{q}{p}=\mu$ จะได้ว่า

$$\sup_{A\subseteq\mathbb{N}\cup\{0\}}\left|P(X\in A)-P(G\in A)\right|\le\sum_{k\in S(X)\setminus\{0\}}\frac{\left|(k+1)q-p\sigma^2w(k)\right|p_X(k)}{k} \tag{1.3}$$

โดยที่ $\sup_{A\subseteq\mathbb{N}\cup\{0\}}\left|P(X\in A)-P(G\in A)\right|=\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{\infty}\left|p_X(x)-p_G(x)\right|$ คือ ระยะทางของความแตกต่างรวม (Total variation distance) ระหว่างการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบ $(P(X\in A))$ และการแจกแจงเรขาคณิต $(P(G\in A))$ และ $w(x)=\frac{\sum_{k=0}^{x}(\mu-k)p_X(k)}{p_X(x)}$ คือ ฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่ม X

รูปแบบที่สองเมื่อ $A=\{0,\ldots,x_0\}$ และ $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ คือ

$$\sup_{x_0 \geq 0} \left| \mathbb{F}(x_0) - \mathbb{G}(x_0) \right| \leq \sum_{k \in S(X)} \left| q - \frac{p\sigma^2 w(k)}{k+1} \right| p_X(k) + \left| \frac{q}{p} - \mu \right| \sum_{k \in S(X) \setminus \{0\}} \frac{p_X(k)}{k} \tag{1.4}$$

และถ้า $\frac{q}{p} = \mu$ จะได้ว่า

$$\sup_{x_0 \geq 0} \left| \mathbb{F}(x_0) - \mathbb{G}(x_0) \right| \leq \sum_{k \in S(X)} \left| q - \frac{p\sigma^2 w(k)}{k+1} \right| p_X(k) \tag{1.5}$$

โดยที่ $\sup\limits_{x_0 \geq 0} \left| \mathbb{F}(x_0) - \mathbb{G}(x_0) \right|$ คือ ระยะทางของคอลโมโกรอฟ (Kolmogorov distance) ระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบ $\mathbb{F}(x_0) = \sum_{k=0}^{x_0} p_X(k)$ และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มเรขาคณิต $\mathbb{G}(x_0) = \sum_{k=0}^{x_0} pq^k$

ในกรณีของขอบเขตไม่เอกรูปมีรูปแบบเดียว คือ

กรณีที่ $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{F}(0) - \mathbb{G}(0) \right| \leq & \sum_{k \in S(X) \setminus \{0\}} \left| \frac{q}{k} - \frac{p\sigma^2 w(k)}{k(k+1)} \right| p_X(k) \\ & + \left| q - p\mu \right| \left\{ p_X(0) + \sum_{k \in S(X) \setminus \{0\}} \frac{p_X(k)}{k} \right\} \end{aligned} \tag{1.6}$$

และถ้า $\frac{q}{p} = \mu$ จะได้ว่า

$$\left| \mathbb{F}(0) - \mathbb{G}(0) \right| \leq \sum_{k \in S(X) \setminus \{0\}} \left| \frac{q}{k} - \frac{p\sigma^2 w(k)}{k(k+1)} \right| p_X(k) \tag{1.7}$$

กรณีที่ $x_0 \in \mathbb{N}$ และ $0 < q < 1/2$

$$|\mathbb{F}(x_0) - \mathbb{G}(x_0)| \leq \frac{1}{x_0 + 1}\left\{ \sum_{k \in S(X)} \left|(k+1)q - p\sigma^2 w(k)\right| p_X(k) + \left|\frac{q}{p} - \mu\right| [1 - p_X(0)] \right\} \quad (1.8)$$

และถ้า $0 < q < 2/3$ และ $\frac{q}{p} = \mu$ จะได้ว่า

$$|\mathbb{F}(x_0) - \mathbb{G}(x_0)| \leq \frac{1}{x_0 + 1} \sum_{k \in S(X)} \left|(k+1)q - p\sigma^2 w(k)\right| p_X(k) \quad (1.9)$$

และ Teerapabolarn (2013) ได้ปรับปรุงขอบเขตไม่เอกรูปในอสมการ (1.9) และสามารถใช้ได้กับทุกค่าของ q เมื่อ $0 < q < 1$ ดังนี้

$$|\mathbb{F}(x_0) - \mathbb{G}(x_0)| \leq \frac{1}{x_0 + 1} \sum_{k \in S(X)} \left|(k+1)q - p\sigma^2 w(k)\right| p_X(k)\Delta(x_0) \quad (1.10)$$

โดยที่

$$\Delta(x_0) = \frac{1 - q^{x_0+1}}{(x_0 + 1)p} \max\left\{ p, \frac{1}{x_0 + 2} \right\}$$

พิจารณาขอบเขตทางด้านขวามือในอสมการ (1.2) และ (1.3) จะสังเกตได้ว่าขอบเขตทั้งสองขอบเขตเป็นขอบเขตเอกรูปที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเซต A ทำให้การประมาณข้างต้นไม่สอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงของเซต A ถ้าหากว่าขอบเขตทางด้านขวามือในอสมการ (1.2) และ (1.3) สามารถเปลี่ยนแปลงไปตามเซต A ในลักษณะที่ทำให้การประมาณการแจกแจงมีความแม่นยำมากขึ้น หรือเหมาะสมมากขึ้น ซึ่งน่าจะเป็นผลดีต่อการนำขอบเขตไปประยุกต์ใช้ได้ดีกว่า นอกจากนี้จะเห็นได้ว่าขอบเขตทางด้านขวามือในอสมการ (1.8) และ (1.9) สามารถประยุกต์ใช้ได้ภาใต้ข้อจำกักของค่า q คือ $0 < q < 1/2$ หรือ $0 < q < 2/3$ เท่านั้น ดังนั้นในการศึกษาครั้งนี้จึงต้องการหาขอบเขตไม่เอกรูปสำหรับผลลัพธ์ในอสมการ (1.2) และ (1.3) และต้องการปรับปรุงขอบเขตไม่เอกรูปในอสมการ (1.8) ถึง (1.10) ให้ดีขึ้นกว่าเดิม โดยสามารถประยุกต์ใช้ได้กับทุกช่วงของค่า q $(0 < q < 1)$

วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. เพื่อหาขอบเขตไม่เอกรูปสำหรับระยะทางของความแตกต่างรวมระหว่างการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบและการแจกแจงเรขาคณิต

2. เพื่อปรับปรุงขอบเขตไม่เอกรูปสำหรับระยะทางของคอลโมโกรอฟระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มเรขาคณิต

3. เพื่อเปรียบเทียบขอบเขตไม่เอกรูปแบบใหม่และแบบเดิม

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

ได้ขอบเขตไม่เอกรูปใหม่เพื่อใช้ตรวจสอบความถูกต้องในการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบด้วยการแจกแจงเรขาคณิตได้แม่นยำมากขึ้น

ขอบเขตของการวิจัย

การศึกษาครั้งนี้สนใจเฉพาะการหาขอบเขตไม่เอกรูปบนการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบด้วยการแจกแจงเรขาคณิตที่อยู่ในรูปของระยะทางของความแตกต่างรวม และระยะทางของคอลโมโกรอฟ

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

1. ขอบเขตบนของฟังก์ชันค่าจริง (Upper bound of real-valued function)

ให้ S เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ และ f เป็นฟังก์ชันจาก S ไป $\mathbb{R}$ ถ้ามีจำนวนจริง u ซึ่ง $f(x) \le u$ สำหรับทุก $x \in S$ จะเรียก u ว่าเป็นขอบเขตบนของ f และถ้า u เป็นขอบเขตบนของ f ที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับขอบเขตบนทุกตัวของ f แล้วจะเรียก u ว่า ขอบเขตบนที่น้อยที่สุด (Least upper bound หรือ supremum) ของ f แทนด้วย $\sup f$ เช่น $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ เมื่อ $x \ge 1$ ดังนั้นขอบเขตบนของ f คือ จำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 1 และ $\sup\limits_{x \ge 1} f(x) = 1$

2. ขอบเขตเอกรูปและไม่เอกรูป (Uniform and non-uniform bounds)

ให้ $\mathbb{F}$ และ $\mathbb{G}$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบ X และ G ตามลำดับ และให้ $\delta(x_0)$ แทนขอบเขตบนของผลต่างระหว่าง $\mathbb{F}$ และ $\mathbb{G}$ ที่ $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ซึ่งมีรูปแบบการประมาณการแจกแจงพร้อมด้วยขอบเขตบนเป็นดังนี้

$$\left|\mathbb{F}(x_0) - \mathbb{G}(x_0)\right| \le \delta(x_0)$$

ถ้า $\delta(x_0)$ มีค่าคงตัวสำหรับทุกค่าของ x_0 แล้วจะกล่าวว่า $\delta(x_0)$ เป็นขอบเขตเอกรูปของ $\left|\mathbb{F}(x_0) - \mathbb{G}(x_0)\right|$ บนเซต $\mathbb{N} \cup \{0\}$ และถ้า $\delta(x_0)$ มีค่าเปลี่ยนแปลงตามค่าของ x_0 แล้วจะกล่าวว่า $\delta(x_0)$ เป็นขอบเขตไม่เอกรูปของ $\left|\mathbb{F}(x_0) - \mathbb{G}(x_0)\right|$

3. ระยะทางของความแตกต่างรวม (Total variation distance)

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบ การแจกแจงตัวแปรสุ่ม X คือความน่าจะเป็น P_X บนเซต $\mathbb{N} \cup \{0\}$ ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$P_X(A) = P(X \in A)$$

โดยที่ $A \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$

ระยะทางของความแตกต่างรวมระหว่างการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบ X และการแจงแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบ G บนเซต $A \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ (Serfling, 1975) กำหนดได้ดังนี้

(1) ถ้าขอบเขตไม่เปลี่ยนแปลงตามเซต A จะใช้รูปแบบ

$$d_{TV}(X,G) = \sup_{A} \left| P(X \in A) - P(G \in A) \right|$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left| p_X(i) - p_G(i) \right|$$

(2) ถ้าขอบเขตเปลี่ยนแปลงตามเซต A จะใช้รูปแบบ

$$d_A(X,G) = \left| P(X \in A) - P(G \in A) \right|$$

4. ระยะทางของคอลโมโกรอฟ (Kolmogorov distance)

ให้ $\mathbb{F}$ และ $\mathbb{G}$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบ X และ G ตามลำดับ ระยะทางของคอลโมโกรอฟระหว่าง $\mathbb{F}$ และ $\mathbb{G}$ สำหรับทุก $X \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ กำหนดได้ดังนี้

(1) ถ้าขอบเขตไม่เปลี่ยนแปลงตามค่าของ x_0 จะใช้รูปแบบ

$$d_K(X,G) = \sup_{x_0 \geq 0} \left| \mathbb{F}(x_0) - \mathbb{G}(x_0) \right|$$

(2) ถ้าขอบเขตเปลี่ยนแปลงตามค่าของ x_0 จะใช้รูปแบบ

$$d_{K_{x_0}}(X,G) = \left| \mathbb{F}(x_0) - \mathbb{G}(x_0) \right|$$

5. เมตริกแบบจุด (Point metric)

เมตริกแบบจุดระหว่างฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X และ G สำหรับทุก $X \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ กำหนดได้ดังนี้

(1) ถ้าขอบเขตไม่เปลี่ยนแปลงตามค่าของ x_0 จะใช้รูปแบบ

$$d_p(X,G) = \sup_{x_0 \ge 0} \left| p_X(x_0) - p_G(x_0) \right|$$

(2) ถ้าขอบเขตเปลี่ยนแปลงตามค่าของ x_0 จะใช้รูปแบบ

$$d_{p_{x_0}}(X,G) = \left| p_X(x_0) - p_G(x_0) \right|$$

6. วิธีของสไตน์สำหรับการการแจกแจงเรขาคณิต

วิธีของสไตน์ (Stein's method) ได้เริ่มต้นนำเสนอครั้งแรกโดย Stein (1972) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้เพื่อประมาณการแจกแจงของผลรวมตัวแปรสุ่มที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน (Dependent random variables) ด้วยการแจกแจงปรกติ (Normol distribution) ในปี 1975 Chen ได้ปรับปรุงและพัฒนาวิธีของสไตน์แบบเดิมมาสู่การประมาณการแจกแจงของผลรวมของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน (Dependent Bernoulli random variable) ด้วยการแจกแจงปัวซง (Poisson distribution) (Chen, 1975) และ Brown and Phillips (1999) ได้ประยุกต์วิธีของสไตน์มาใช้กับการประมาณการแจกแจงของผลรวมของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีด้วยการแจกแจงเรขาคณิต ซึ่งสมการของสไตน์สำหรับการแจกแจงเรขาคณิตที่มีพารามิเตอร์ p เมื่อ $p = 1 - q \in (0,1)$ (กำหนดฟังก์ชัน h) ดังนี้

$$h(x) - \mathbb{G}_p(h) = q(1+x) f(x+1) - x f(x) \tag{2.1}$$

โดยที่ $\mathbb{G}_p(h) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) p q^k$ และ f และ h เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตที่นิยามบนเซต $\mathbb{N} \cup \{0\}$

7. ฟังก์ชัน w

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ Cacoullos and Papathanasiou (1989) ได้นิยามฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่ม X หรือสัมพันธ์กับการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ในรูปของความสัมพันธ์ดังนี้

$$w(x) p_X(x) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{x} (\mu - i) p_X(i), \quad x \in S(X) \tag{2.2}$$

ต่อมา Majsnerowska (1998) ได้ปรับรูปความสัมพันธ์ในสมการ (2.3) ให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence relation) ดังนี้

$$w(x)=\frac{1}{\sigma^2}\left\{\mu+\frac{\sigma^2 w(x-1)p_X(x-1)}{p_X(x)}-x\right\},\quad x\in S(X)\setminus\{0\} \tag{2.3}$$

และ $w(x)\geq 0$, $x\in S(X)\setminus\{0\}$

โดยที่ $w(0)=\frac{\mu}{\sigma^2}$ และ $p_X(x)>0$ สำหรับทุก $x\in S(X)$

รูปแบบความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชัน w สำหรับการสร้างผลการวิจัยซึ่ง Cacoullos and Papathanasiou (1989) ได้กำหนดไว้ดังนี้

ถ้าตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบ X ที่มี $p_X(x)>0$ สำหรับทุก $x\in S(X)$ และมีความแปรปรวนจำกัด $0<\sigma^2<\infty$ แล้ว

$$E\left[(X-\mu)f(X)\right]=\sigma^2 E\left[w(X)\Delta f(X)\right] \tag{2.5}$$

สำหรับฟังก์ชัน $f:\mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{R}$ ที่ทำให้ $E\left|w(X)\Delta f(X)\right|<\infty$

โดย $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ และจะได้ว่า $E\left[w(X)\right]=1$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษานี้จะศึกษาเกี่ยวกับการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบด้วยการแจงแจงเรขาคณิต ซึ่งมีงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

Barbour and Grüble (1995) ได้ค้นหาผลบวกแรกของลำดับจำนวนเต็มบวกแบบสุ่มด้วยการกำหนดตัวหาร

Peköz (1996) ใช้วิธีของสไตน์หาขอบเขตเอกรูปสำหรับวัดความคลาดเคลื่อนในการประมาณเรขาคณิตของตัวแปรสุ่มที่ใช้นับจำนวนความล้มเหลวก่อนการเกิดความสำเร็จในครั้งแรกในลำดับการทดลองย่อยแบร์นูลลีที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน

Brown and Phillips (1999) ได้ใช้วิธีของสไตน์ในการนำเสนอผลลัพธ์ของการประมาณเรขาคณิตสำหรับผลรวมของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี m ตัว ที่อยู่ในรูประยะทางของความแตกต่างรวมพร้อมด้วยขอบเขตแบบเอกรูปดังนี้

$$d_{TV}(X,G) \le (2-p)\sum_{j=1}^{m} E(X_j)E\left|X+Z-X_j^*\right| \tag{2.6}$$

โดยที่ $E(X)=\dfrac{q}{p}$, Z เป็นตัวแปรสุ่มเรขาคณิตที่มีพารามิเตอร์ p ที่เป็นอิสระจากตัวแปรสุ่ม X และ X_j^* เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเหมือนกับตัวแปรสุ่ม $X-X_j$ บนเงื่อนไข $X_j=1$

Phillips and Weinberg (2000) ได้ปรับปรุงขอบเขตเอกรูปของ Brown and Phillips (1999) โดยใช้วิธีของสไตน์และได้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าเดิมดังนี้

$$d_{TV}(X,G) \le (2-p)\sum_{j=1}^{m} E(X_j)E\left|\frac{X+Z-X_j^*}{X_j^*+1}\right| \tag{2.7}$$

Teerapabolarn (2008) ใช้วิธีของสไตน์และฟังก์ชัน w หาขอบเขตเอกรูปของการประมาณการแจกแจงโพยา (Pólya distribution)) ด้วยการแจกแจงเรขาคณิต ซึ่งให้ผลดีกว่าขอบเขตเอกรูปของ Brown and Phillips (1999) และ Phillips and Weinberg (2000)

Teerapabolarn (2011) ใช้วิธีของสไตน์และฟังก์ชัน w หาขอบเขตเอกรูปและไม่เอกรูปบนการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ด้วยการแจกแจงเรขาคณิตดังนี้

$$d_{TV}(X,G) \le \sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}} \frac{\left|(x+1)q-p\sigma^2 w(x)\right| p_X(x)}{x} + \left|\frac{q}{p}-\mu\right| \tag{2.8}$$

และถ้า $\dfrac{q}{p}=\mu$ จะได้ว่า

$$d_{TV}(X,G) \le \sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}} \frac{\left|(x+1)q-p\sigma^2 w(x)\right| p_X(x)}{x} \tag{2.9}$$

และเมื่อ $A=\{0,\dots,x_0\}$ และ $x_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ จะได้ว่า

$$d_K(X,G) \le \sum_{x\in S(X)} \left|q-\frac{p\sigma^2 w(x)}{x+1}\right| p_X(x) + \left|\frac{q}{p}-\mu\right| \sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}} \frac{p_X(x)}{x} \tag{2.10}$$

และถ้า $\frac{q}{p} = \mu$ จะได้ว่า

$$d_K(X,G) \le \sum_{x \in S(X)} \left| q - \frac{p\sigma^2 w(x)}{x+1} \right| p_X(x) \tag{2.11}$$

ในกรณีของขอบเขตไม่เอกรูปจะได้

กรณีที่ $x_0 = 0$

$$d_{K_{x_0}}(X,G) \le \sum_{x \in S(X)\setminus\{0\}} \left| \frac{q}{x} - \frac{p\sigma^2 w(x)}{x(x+1)} \right| p_X(x) + |q - p\mu| \left\{ p_X(0) + \sum_{x \in S(X)\setminus\{0\}} \frac{p_X(x)}{x} \right\} \tag{2.12}$$

และถ้า $\frac{q}{p} = \mu$ จะได้ว่า

$$d_{K_{x_0}}(X,G) \le \sum_{x \in S(X)\setminus\{0\}} \left| \frac{q}{x} - \frac{p\sigma^2 w(x)}{x(x+1)} \right| p_X(x) \tag{2.13}$$

กรณีที่ $x_0 = \mathbb{N}$ และ $0 < q < 1/2$

$$d_{K_{x_0}}(X,G) \le \frac{1}{x_0+1} \left\{ \sum_{x \in S(X)} \left| (x+1)q - p\sigma^2 w(x) \right| p_X(x) + \left| \frac{q}{p} - \mu \right| \right\} \tag{2.14}$$

และถ้า $0 < q < 2/3$ และ $\frac{q}{p} = \mu$ จะได้ว่า

$$d_{K_{x_0}}(X,G) \le \frac{1}{x_0+1} \sum_{x \in S(X)} \left| (x+1)q - p\sigma^2 w(x) \right| p_X(x) \tag{2.15}$$

พิม มะลิงาม และคณินทร์ ธีรภาพโอฬาร (2554) ได้หาขอบเขตไม่เอกรูปบนเมตริกแบบจุดระหว่างฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X และฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม G ในกรณีที่ $A = \{x_0\}$ เมื่อ $x_0 \in S(X)\setminus\{0\}$ จะได้ว่า

$$d_{P_{x_0}}(X,G) \le \sum_{x \in S(X)\backslash\{0\}} \min\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1}{x}\right\} \left|(x+1)q - p\sigma^2 w(x)\right| p_X(x)$$
$$+\left|\frac{q}{p} - \mu\right| p \left\{ p_X(0) + \sum_{x \in S(X)\backslash\{0\}} \min\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1}{x}\right\} p_X(x) \right\} \tag{2.16}$$

และถ้า $\frac{q}{p} = \mu$ จะได้ว่า

$$d_{P_{x_0}}(X,G) \le \sum_{x \in S(X)\backslash\{0\}} \min\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1}{x}\right\} \left|(x+1)q - p\sigma^2 w(x)\right| p_X(x) \tag{2.17}$$

Teerapabolarn (2013) ได้ปรับปรุงขอบเขตไม่เอกรูปในอสมการ (2.12) และสามารถใช้ได้กับทุกค่าของ q เมื่อ $0 < q < 1$ ดังนี้

$$d_{K_{x_0}}(X,G) \le \frac{1}{x_0 + 1} \sum_{x \in S(X)} \left|(x+1)q - p\sigma^2 w(x)\right| p_X(x)\Delta(x_0) \tag{2.18}$$

โดยที่

$$\Delta(x_0) = \frac{1 - q^{x_0+1}}{(x_0+1)p} \max\left\{p, \frac{1}{x_0+2}\right\}$$

Peköz, Röllin and Ross (2013) ได้พัฒนารูปแบบใหม่ของวิธีของสไตน์ที่ทำให้ได้ขอบเขตเอกรูปบนระยะทางของความแตกต่างรวมระหว่างการแจกแจงเรขาคณิตและการแจกแจงที่ต้องการ

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

สำหรับวิธีดำเนินการวิจัยนั้น สามารถแบ่งการดำเนินการออกเป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

3.1 ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการประมาณเรขาคณิต โดยเฉพาะการประมาณเรขาคณิตด้วยวิธีการของสไตน์และฟังก์ชัน w จาก Teerapabolarn (2011) พิม มะลิงาม และคณินทร์ ธีรภาพโอฬาร (2554) เพื่อนำมาสร้างบทตั้งต่าง ๆ ที่จำเป็นสำหรับการสร้างและพิสูจน์ผลลัพธ์ของการศึกษาในครั้งนี้

พิจารณาสมการของสไตน์สำหรับการแจกแจงเรขาคณิตที่มีพารามิเตอร์ $p \in (0,1)$

$$h(x) - \mathbb{G}_p(h) = q(1+x)f(x+1) - xf(x) \tag{3.1}$$

เมื่อ $\mathbb{G}_p(h) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)pq^k$ และ f และ h เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตนิยามบนเซต $\mathbb{N} \cup \{0\}$

ให้ $A \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $h_A : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$h_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases} \tag{3.2}$$

ให้ $C_x = \{0, \ldots, x\}$ ดังนั้นโดย Brown and Phillips (1999) และ Teerapabolarn (2011) ผลเฉลยของ f_A ในสมการ (3.1) เขียนได้ดังนี้

$$f_A(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathbb{G}_p\left(h_{A \cap C_{x-1}}\right) - \mathbb{G}_p(h_A)\mathbb{G}_p\left(h_{C_{x-1}}\right)}{xpq^x} & , x \geq 1 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

และโดย Brown and Phillips (1999) จะได้ว่า

$$f_A = -f_{A^c} \tag{3.4}$$

โดยที่ A^c คือ คอมพลีเมนต์ (Complement) ของ A และจากสมการ (3.4) จะได้ว่า

$$\Delta f_A = -\Delta f_{A^c} \tag{3.5}$$

โดยที่ $\Delta f_A(x) = f_A(x+1) - f_A(x)$ ให้ $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $A = C_{x_0}$ จะได้ผลเฉลย $f_{C_{x_0}}$ ในสมการ (3.1) เป็นดังนี้

$$f_{C_{x_0}}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathbb{G}_p(h_{C_{x-1}})\mathbb{G}_p(1-h_{C_{x_0}})}{xpq^x} & , x \le x_0 \\ \dfrac{\mathbb{G}_p(h_{C_{x_0}})\mathbb{G}_p(1-h_{C_{x-1}})}{xpq^x} & , x > x_0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

จะสังเกตได้ว่า $f_{C_{x_0}}(x) > 0$ สำหรับทุก $x, x_0 \in \mathbb{N}$ ให้ $\Delta f_{x_0}(x) = f_{x_0}(x+1) - f_{x_0}(x)$ และจาก Teerapabolarn (2011) จะได้ว่า

$$\Delta f_{C_{x_0}}(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=x_0+1}^{\infty} q^{k-x}\left[\frac{1}{(x+1)q}\sum_{j=0}^{x} pq^j - \frac{1}{x}\sum_{j=0}^{x-1} pq^j\right] & , x \le x_0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{x_0} q^k\left[-\frac{1}{x(x+1)}\right] & , x > x_0 \end{cases} \tag{3.7}$$

และ

$$\Delta f_{C_{x_0}}(x) \begin{cases} > 0 & , x \le x_0 \\ < 0 & , x > x_0 \end{cases} \tag{3.8}$$

และในกรณีที่ $x \le x_0$ Teerapabolarn (2013) ได้แสดงว่า

$$0 < \Delta f_{C_{x_0}}(x) \le \Delta f_{C_{x_0}}(x_0) \tag{3.9}$$

ให้ $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $A = \{x_0\}$ และกำหนด $h_{x_0} = h_{\{x_0\}}$ ดังนั้นผลเฉลย $f_{x_0} = f_{\{x_0\}}$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} \dfrac{-\mathbb{G}_p(h_{x_0})\mathbb{G}_p(h_{C_{x-1}})}{xpq^x} & , x \le x_0 \\ \dfrac{\mathbb{G}_p(h_{x_0})\mathbb{G}_p(1-h_{C_{x-1}})}{xpq^x} & , x > x_0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

โดยการประยุกต์ใช้ Brown and Phillips (1999) จะได้ว่า

$$\Delta f_{x_0}(x) = f_{x_0}(x+1) - f_{x_0}(x) \begin{cases} < 0 & , x \ne x_0 \\ > 0 & , x = x_0 \end{cases} \tag{3.11}$$

ต่อมา พิมพ์ มะลิงาน และคณินทร์ ธีรภาพโอฬาร (2554) ได้แสดงว่า

$$\Delta f_x(x) \le \frac{1}{x} \tag{3.12}$$

บทตั้งต่าง ๆ ต่อไปนี้เป็นการนำเสนอส่วนประกอบที่สำคัญ เพื่อนำไปใช้ในการปรับปรุงผลการวิจัยที่ต้องการ

บทตั้ง 3.1 ให้ $x_0 \in \mathbb{N}$ ถ้า $0 < p = 1 - q < 1$ แล้วจะได้ว่าอสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\frac{1-q^{x_0+1}}{(x_0+1)p} < \frac{1-q^{x_0}}{x_0 p} \le 1 \tag{3.13}$$

พิสูจน์ ให้ $x_0 \in \mathbb{N}$ เริ่มต้นจะแสดงว่า $\dfrac{1-q^{x_0}}{x_0 p} \le 1$

$$\begin{aligned} \frac{1-q^{x_0}}{x_0 p} &= \frac{\sum_{k=0}^{x_0-1} pq^k}{x_0 p} \\ &= \frac{1+q+\cdots+q^{x_0-1}}{x_0} \\ &\le 1 \quad (0 < q < 1) \end{aligned} \tag{3.14}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\frac{1-q^{x_0+1}}{(x_0+1)p} < \frac{1-q^{x_0}}{x_0 p}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1-q^{x_0+1}}{(x_0+1)p} &= \frac{\sum_{k=0}^{x_0} pq^k}{(x_0+1)p} \\
&= \frac{1+q+\cdots+q^{x_0-1}}{x_0+1} + \frac{q^{x_0}}{x_0+1} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{x_0-1} q^k}{x_0+1} + \frac{q^{x_0}}{x_0+1} \\
&= \frac{x_0 \sum_{k=0}^{x_0-1} q^k}{x_0(x_0+1)} + \frac{x_0 q^{x_0}}{x_0(x_0+1)} \\
&< \frac{x_0 \sum_{k=0}^{x_0-1} q^k}{x_0(x_0+1)} + \frac{\sum_{k=0}^{x_0-1} q^k}{x_0(x_0+1)} \\
&= \frac{(x_0+1)\sum_{k=0}^{x_0-1} q^k}{x_0(x_0+1)} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{x_0-1} q^k}{x_0} \\
&= \frac{1-q^{x_0}}{x_0 p} \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

ดังนั้นจากอสมการ (3.14) และ (3.15) จะได้ว่าอมการ (3.13) เป็นจริง □

บทตั้ง 3.2 ให้ $x, x_0 \in \mathbb{N}$ แล้วจะได้ว่าอสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\sup_{x\geq 1} f_{C_{x_0}}(x) \leq \frac{1-q^{x_0+1}}{xp} \qquad (3.16)$$

$$\sup_{x\geq 1} f_{C_{x_0}}(x) \leq \frac{1-q^{x_0+1}}{(x_0+1)p} \qquad (3.17)$$

$$\sup_{x\geq 1} \left|\Delta f_{C_{x_0}}(x)\right| \leq \frac{1-q^{x_0+1}}{x+1} \max\left\{1, \frac{1}{(x_0+1)p}\right\} \qquad (3.18)$$

และ

$$\sup_{x\geq 1}\left|\Delta f_{C_{x_0}}(x)\right| \leq \frac{1-q^{x_0+1}}{x_0+1}\max\left\{1, \frac{1}{(x_0+2)p}\right\} \tag{3.19}$$

พิสูจน์ เริ่มต้นจะแสดงว่าอสมการ (3.16) เป็นจริง เมื่อ $x_0 \geq x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f_{C_{x_0}}(x) &= \frac{\mathbb{G}_p(h_{C_{x-1}})\mathbb{G}_p(1-h_{C_{x_0}})}{xpq^x} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{x-1} pq^k \sum_{j=x_0+1}^{\infty} pq^j}{xpq^x} \\
&\leq \frac{\sum_{k=0}^{x-1} pq^k}{xp} \\
&\leq \frac{\sum_{k=0}^{x_0} pq^k}{xp} \\
&= \frac{1-q^{x_0+1}}{xp}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

เมื่อ $x_0 < x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f_{C_{x_0}}(x) &= \frac{\mathbb{G}_p(h_{C_{x_0}})\mathbb{G}_p(1-h_{C_{x-1}})}{xpq^x} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{x_0} pq^k \sum_{j=x}^{\infty} pq^j}{xpq^x} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{x_0} pq^k \sum_{j=x}^{\infty} pq^{j-x}}{xp} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{x_0} pq^k \sum_{j=0}^{\infty} pq^j}{xp}
\end{aligned}$$

$$f_{C_{x_0}}(x) = \frac{\sum_{k=0}^{x_0} pq^k}{xp} = \frac{1-q^{x_0+1}}{xp} \tag{3.21}$$

ดังนั้นจากอสมการ (3.20) และสมการ (3.21) จะได้ว่าอสมการ (3.16) เป็นจริง

ลำดับต่อไปจะแสดงว่าอสมการ (3.17) เป็นจริง จากอสมการ (3.8) จะได้ $f_{C_{x_0}}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม สำหรับ $x \in \{0,\dots,x_0\}$ และเป็นฟังก์ชันลด สำหรับ $x \in \{x_0+1,\dots\}$ ดังนั้นจะได้ว่า $f_{C_{x_0}}(x) \le f_{C_{x_0}}(x_0)$ สำหรับทุก $x \in \{0,\dots,x_0\}$ และ $f_{C_{x_0}}(x) \le f_{C_{x_0}}(x_0+1)$ สำหรับทุก $x \in \{x_0+1,\dots\}$ และจะสังเกตได้ว่า

$$\begin{aligned}
f_{C_{x_0}}(x_0+1) - f_{C_{x_0}}(x_0) &= \frac{\mathbb{G}_p(h_{C_{x_0}})\mathbb{G}_p(1-h_{C_{x_0}})}{(x_0+1)pq^{x_0+1}} - \frac{\mathbb{G}_p(h_{C_{x_0-1}})\mathbb{G}_p(1-h_{C_{x_0}})}{x_0 pq^{x_0}} \\
&= \frac{\mathbb{G}_p(1-h_{C_{x_0}})}{pq^{x_0}}\left[\frac{\mathbb{G}_p(h_{C_{x_0}})}{(x_0+1)q} - \frac{\mathbb{G}_p(h_{C_{x_0-1}})}{x_0}\right] \\
&= \frac{\sum_{k=x_0+1}^{\infty} pq^k}{pq^{x_0}}\left[\frac{\sum_{j=0}^{x_0} pq^j}{(x_0+1)q} - \frac{\sum_{j=0}^{x_0-1} pq^j}{x_0}\right] \\
&> 0 \qquad \text{(โดยอสมการ (3.7) และ (3.8))}
\end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ว่า $f_{C_{x_0}}(x) < f_{C_{x_0}}(x_0+1)$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{N}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\sup_{x\ge 1} f_{C_{x_0}}(x) &\le f_{C_{x_0}}(x_0+1) \\
&= \frac{\mathbb{G}_p(h_{C_{x_0}})\mathbb{G}_p(1-h_{C_{x_0}})}{(x_0+1)pq^{x_0+1}} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{x_0} pq^k \sum_{j=x_0+1}^{\infty} pq^j}{(x_0+1)pq^{x_0+1}} \\
&= \frac{(1-q^{x_0+1})q^{x_0+1}}{(x_0+1)pq^{x_0+1}}
\end{aligned}$$

$$\sup_{x\ge 1} f_{C_{x_0}}(x) \le \frac{1-q^{x_0+1}}{(x_0+1)p} \tag{3.22}$$

ดังนั้นจากอสมการ (3.22) จะได้ว่าอสมการ (3.17) เป็นจริง

ต่อไปจะแสดงว่าอสมการ (3.18) เป็นจริง เมื่อ $x_0 \ge x$ และจากอสมการ (3.9) จะได้

$$\begin{aligned}
\left|\Delta f_{C_{x_0}}(x)\right| &= \Delta f_{C_{x_0}}(x) \\
&\le \Delta f_{C_{x_0}}(x_0) \\
&= \sum_{k=x_0+1}^{\infty} q^{k-x_0}\left[\frac{1}{(x_0+1)q}\sum_{j=0}^{x_0} pq^j - \frac{1}{x_0}\sum_{j=0}^{x_0-1} pq^j\right] \\
&= \sum_{k=x_0+1}^{\infty} pq^{k-x_0-1}\left[\frac{1}{x_0+1}\sum_{j=0}^{x_0} q^j - \frac{1}{x_0}\sum_{j=0}^{x_0-1} q^{j+1}\right] \\
&= \frac{1}{x_0+1}\sum_{j=0}^{x_0} q^j - \frac{1}{x_0}\sum_{j=1}^{x_0} q^j - \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0} \\
&= \frac{\sum_{j=0}^{x_0} q^j}{x_0+1} - \frac{\sum_{j=0}^{x_0} q^j}{x_0} + \frac{1}{x_0} \\
&= \frac{1}{x_0} - \frac{\sum_{j=0}^{x_0} q^j}{x_0(x_0+1)} \\
&= \frac{1}{x_0}\left(1 - \frac{\sum_{j=0}^{x_0} q^j}{x_0+1}\right) \\
&= \frac{1}{x_0}\left(\frac{x_0+1-(1+q+\cdots+q^{x_0})}{x_0+1}\right) \\
&= \frac{1}{x_0}\left(\frac{\underbrace{1+\cdots+1}_{x_0} - q - \cdots - q^{x_0}}{x_0+1}\right) \\
&= \frac{1}{x_0}\left[\frac{(1-q)+\cdots+(1-q^{x_0})}{x_0+1}\right] \\
&\le \frac{1}{x_0}\left[\frac{(1-q^{x_0+1})+\cdots+(1-q^{x_0+1})}{x_0+1}\right]
\end{aligned}$$

$$\left|\Delta f_{C_{x_0}}(x)\right| \le \frac{1}{x_0}\left[\frac{x_0(1-q^{x_0+1})}{x_0+1}\right]$$
$$= \frac{1-q^{x_0+1}}{x_0+1} \tag{3.23}$$
$$\le \frac{1-q^{x_0+1}}{x+1} \tag{3.24}$$

เมื่อ $x_0 < x$ จากอสมการ (3.7) จะได้ว่า

$$\left|\Delta f_{C_{x_0}}(x)\right| = -\Delta f_{C_{x_0}}(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{x_0} q^k \left[\frac{1}{x(x+1)}\right]$$
$$= \frac{1-q^{x_0+1}}{p}\left[\frac{1}{x(x+1)}\right]$$
$$= \frac{1-q^{x_0+1}}{x+1}\left(\frac{1}{xp}\right)$$
$$\le \frac{1-q^{x_0+1}}{x+1}\left[\frac{1}{(x_0+1)p}\right] \tag{3.25}$$

จากอสมการ (3.23) และ (3.24) จะได้ว่า

$$\left|\Delta f_{C_{x_0}}(x)\right| \le \frac{1-q^{x_0+1}}{x+1}\max\left(1, \frac{1}{(x_0+1)p}\right)$$

สำหรับทุก $x \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้อสมการ (3.18) เป็นจริง

ลำดับสุดท้ายจะแสดงว่าอสมการ (3.19) เป็นจริงเมื่อ $x_0 \ge x$ จากอสมการ (3.23) จะได้ว่า

$$\left|\Delta f_{C_{x_0}}(x)\right| \le \frac{1-q^{x_0+1}}{x_0+1} \tag{3.26}$$

เมื่อ $x_0 < x$ จากอสมการ (3.25) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\left|\Delta f_{C_{x_0}}(x)\right| &\le \frac{1-q^{x_0+1}}{x+1}\left[\frac{1}{(x_0+1)p}\right] \\
&\le \frac{1-q^{x_0+1}}{(x_0+1)(x_0+2)p}
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

ดังนั้นจากอสมการ (3.26) และ (3.27) จะได้ว่าอมการ (3.19) เป็นจริง $\square$

บทตั้ง 3.3 กำหนดให้ $A \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x \in \mathbb{N}$, $x_A^{\circ} = \min\{x \mid x \in A\}$, $x_A^{\bullet} = \max\{x \mid C_x \subseteq A\}$ และ $x_A^{\oplus} = \max\{x \mid x \in A\}$ แล้วจะได้ว่า

(1) สำหรับ f_A จะได้ว่า

$$\sup_A |f_A(x)| \le \frac{1}{xp} \tag{3.28}$$

และ

$$\sup_A |f_A(x)| \le \frac{1-q^{x_A^{\circ}}}{x_A^{\circ} p} \tag{3.29}$$

โดยให้ $\frac{1}{x_A^{\circ}}$ มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ $x_A^{\circ} = 0$

(2) สำหรับ Δf_A จะได้ว่า

$$\sup_A |\Delta f_A(x)| \le \frac{1}{x} \tag{3.30}$$

และ

$$\sup_A |\Delta f_A(x)| \le \frac{1}{x_A} \tag{3.31}$$

โดยที่

$$\frac{1}{x_A} = \begin{cases} \dfrac{1}{x_A^{\bullet}+1} & ,0 \in A \\ \dfrac{1}{x_A^{\circ}} & ,0 \notin A \end{cases} \tag{3.32}$$

พิสูจน์ จะแบ่งการพิสูจน์อสมการ (3.28) และ (3.29) ออกเป็นสามกรณี

กรณีที่ 1 $0 < x \le x_A^{\circ}$

$$\begin{aligned} 0 &\ge f_A(x) \\ &\ge f_{\left\{x_A^{\circ}, x_A^{\circ}+1, \ldots\right\}}(x) \\ &= f_{C^c_{x_A^{\circ}-1}}(x) \\ &= -f_{C_{x_A^{\circ}-1}}(x) \end{aligned}$$

ซึ่งทำให้ได้ $|f_A(x)| \le f_{C_{x_A^{\circ}-1}}(x)$ และโดยอสมการ (3.16) และ (3.17) จะได้ว่า

$$|f_A(x)| \le \frac{1}{xp} \tag{3.33}$$

และ

$$|f_A(x)| \le \frac{1-q^{x_A^{\circ}}}{x_A^{\circ} p} \tag{3.34}$$

กรณีที่ 2 $x > x_A^{\oplus}$

$$\begin{aligned} |f_A(x)| &= f_A(x) \\ &= f_{\left\{x_A^{\circ}, \ldots, x_A^{\oplus}\right\}}(x) \\ &\le f_{\left\{0, \ldots, x_A^{\oplus}\right\}}(x) \\ &= f_{C_{x_A^{\oplus}}}(x) \end{aligned}$$

และโดยอสมการ (3.16) และ (3.17) จะได้ว่า

$$\left|f_A(x)\right| \le \frac{1}{xp} \tag{3.35}$$

และ

$$\left|f_A(x)\right| \le \frac{1-q^{x_A^{\oplus}+1}}{\left(x_A^{\oplus}+1\right)p} \tag{3.36}$$

กรณีที่ 3 $x_A^{\circ} < x \le x_A^{\oplus}$

จะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสองกรณีย่อยดังนี้

(I) ถ้า $f_A(x) \le 0$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 &\ge f_A(x) \\ &\ge f_{\left\{x,\dots,x_A^{\oplus}\right\}}(x) \\ &\ge f_{\left\{x,\dots,x_A^{\oplus},x_A^{\oplus}+1,\dots\right\}}(x) \\ &= f_{C_{x-1}^c}(x) \\ &= -f_{C_{x-1}}(x) \end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\left|f_A(x)\right| \le f_{C_{x-1}}(x) \tag{3.37}$$

(II) ถ้า $f_A(x) > 0$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left|f_A(x)\right| &= f_A(x) \\ &\le f_{\left\{x_A^{\circ},\dots,x-1\right\}}(x) \\ &\le f_{\left\{0,\dots,x_A^{\circ},\dots,x-1\right\}}(x) \\ &= f_{C_{x-1}}(x) \end{aligned} \tag{3.38}$$

จาก (I) และ **(II)** จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |f_A(x)| &\le f_{C_{x-1}}(x) \\ &\le \frac{1-q^x}{xp} && (3.39) \\ &\le \frac{1}{xp} && (3.40) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $x_A^\circ < x$ และโดยอสมการ (3.13) จะได้ว่า $\frac{1-q^x}{xp} \le \frac{1-q^{x_A^\circ+1}}{\left(x_A^\circ+1\right)p}$ ดังนั้นจากอสมการ (3.39) ทำให้ได้ว่า

$$|f_A(x)| \le \frac{1-q^{x_A^\circ+1}}{\left(x_A^\circ+1\right)p}$$

จากกรณีที่ 1 ถึงกรณีที่ 3 และโดยใช้อสมการ (3.13) เมื่อ $x_A^\circ = 0$ จะเห็นได้ว่า

$$|f_A(x)| \le 1 \tag{3.41}$$

และเมื่อ $x_A^\circ \ne 0$ จะเห็นได้ว่า

$$|f_A(x)| \le \frac{1}{xp} \tag{3.42}$$

และ

$$|f_A(x)| \le \frac{1-q^{x_A^\circ}}{x_A^\circ p} \tag{3.43}$$

ดังนั้นจากอสมการ (3.41) ถึง (3.43) จะได้อสมการ (3.28) และอสมการ (3.29) ตามต้องการ

ลำดับต่อไปจะพิสูจน์อสมการ (3.30)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x} &\ge \Delta f_x(x) && \text{(โดย (3.12))}\\
&\ge \Delta \sum_{k\in A} f_k(x) && \text{(โดย (3.11))}\\
&= \Delta f_A(x) &&\\
&\le \Delta f_{\{x\}^c}(x) && \text{(โดย (3.11))}\\
&= -\Delta f_x(x) && \text{(โดย (3.5))}\\
&\ge -\frac{1}{x} && \text{(โดย (3.12))}
\end{aligned}
$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$
\left|\Delta f_A(x)\right| \le \frac{1}{x} \qquad (3.44)
$$

สำหรับทุก $A \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ ดังนั้นจะได้อสมการ (3.30) ตามต้องการ

ต่อไปจะพิสูจน์อสมการ (3.31) โดยแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสามกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $0 < x \le x_A^\circ$ $\quad (0 \notin A)$

(I) เมื่อ $0 < x < x_A^\circ$ แล้วจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
0 \ge \Delta f_A(x) &\ge \Delta f_{\left\{x_A^\circ, x_A^\circ+1, \ldots, x_A^\oplus, x_A^\oplus+1, \ldots\right\}}(x)\\
&= \Delta f_{C^c_{x_A^\circ-1}}(x)\\
&= -\Delta f_{C_{x_A^\circ-1}}(x)\\
\left|\Delta f_A(x)\right| &\le \Delta f_{C_{x_A^\circ-1}}(x)\\
&\le \frac{1-q^{x_A^\circ}}{x_A^\circ}\\
&\le \frac{1}{x_A^\circ}\\
&\le \frac{1}{x_A}
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 2 $0 < x \le x_A^{\bullet} \quad (0 \in A)$

$$
\begin{aligned}
0 &\le \Delta f_{C_{x_A^{\oplus}}}(x) && \text{(โดย (3.8))} \\
&= \Delta f_0(x) + \cdots + \Delta f_{x_A^{\bullet}}(x) + \Delta f_{x_A^{\bullet}+1}(x) + \cdots + \Delta f_{x_A^{\oplus}}(x) \\
&\le \Delta f_A(x) && \text{(โดย (3.11))} \\
&\le \Delta f_0(x) + \cdots + \Delta f_{x_A^{\bullet}}(x) && \text{(โดย (3.11))} \\
&= \Delta f_{x_A^{\bullet}}(x) \\
&\le \frac{1 - q^{x_A^{\bullet}+1}}{x_A^{\bullet} + 1} && \text{(โดย (3.24))} \\
&\le \frac{1}{x_A^{\bullet} + 1} \\
&= \frac{1}{x_A}
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 3 $x > x_A$

$$
\begin{aligned}
\left|\Delta f_A(x)\right| &\le \frac{1}{x} && \text{(โดย (3.30))} \\
&\le \frac{1}{x_A + 1} \\
&\le \frac{1}{x_A}
\end{aligned}
$$

ดังนั้นจากกรณีที่ 1 ถึงกรณีที่ 3 จะได้อสมการ (3.31) ตามต้องการ □

3.2 ดำเนินการหาขอบเขตไม่เอกรูปสำหรับระยะทางของความแตกต่างรวมระหว่างการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบและการแจกแจงเรขาคณิต และปรับปรุงขอบเขตไม่เอกรูปสำหรับระยะทางของคอลโมโกรอฟระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มเรขาคณิต โดยใช้วิธีของสไตน์และฟังก์ชัน w

3.3 เปรียบเทียบขอบเขตไม่เอกรูปแบบใหม่ (ตามวัตถุประสงค์ข้อที่ 1 และ 2) และแบบเดิม

3.4 นำผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้ในการประมาณการแจกแจงบางการแจกแจง ได้แก่ การแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริกนิเสธ การแจกแจงโพลยา และการแจกแจงโพลยานิเสธ

บทที่ 4
ผลการวิจัย

ผลการวิจัยที่ต้องการในการศึกษาครั้งนี้ คือ ขอบเขตไม่เอกรูปสำหรับระยะทางของความแตกต่างรวมระหว่างการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบและการแจกแจงเรขาคณิต และขอบเขตไม่เอกรูปสำหรับระยะทางของคอลโมโกรอฟระหว่างฟังก์ชันฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มเรขาคณิต ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1. ให้ $\varphi(x)=\left|(x+1)q-p\sigma^2 w(x)\right| p_X(x), x\in S(X)$ และ $A\subseteq \mathbb{N}\cup\{0\}$ แล้วจะได้ว่า

$$d_A(X,G)\le \min\left\{\sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}}\frac{\varphi(x)}{x},\sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}}\frac{\varphi(x)}{x_A}\right\}$$
$$+\left|\frac{q}{p}-\mu\right|\min\left\{\left[p_X(0)p+\sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}}\frac{p_X(x)}{x}\right],\frac{1-q^{x_A^{\circ}}}{x_A^{\circ}}\right\} \tag{4.1}$$

และถ้า $\frac{q}{p}=\mu$ จะได้ว่า

$$d_A(X,G)\le \min\left\{\sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}}\frac{\varphi(x)}{x},\sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}}\frac{\varphi(x)}{x_A}\right\} \tag{4.2}$$

พิสูจน์ Teerapabolarn (2011) ได้แสดงว่า

$$\begin{aligned}
d_A(X,G) &\le \sum_{x\in S(X)}\left\{\left|(x+1)q-p\sigma^2 w(x)\right|\left|\Delta f_A(x)\right|+\left|q-p\mu\right|\left|f_A(x)\right|\right\}p_X(x)\\
&= \sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}}\varphi(x)\left|\Delta f_A(x)\right|+\left|q-p\mu\right|\left|f_A(1)\right|p_X(0)\\
&\quad+\sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}}\left|q-p\mu\right|\left|f_A(x)\right|p_X(x) \qquad (f_A(0)=0)\\
&= \sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}}\varphi(x)\left|\Delta f_A(x)\right|+\left|q-p\mu\right|\left[\left|f_A(1)\right|p_X(0)+\sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}}\left|f_A(x)\right|p_X(x)\right]
\end{aligned}$$

โดยที่ f_A ได้นิยามไว้ในสมการ (3.3) และโดยใช้บทตั้ง 3.3 ในการหาของเขตของ $|f_A(x)|$, $|\Delta f_A(x)|$ และ $|f_A(1)|$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
d_A(X,G) &\le \sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}} \varphi(x)\min\left\{\frac{1}{x},\frac{1}{x_A}\right\} \\
&\quad +|q-p\mu|\left[\min\left\{\frac{1}{p},\frac{1-q^{\mathring{x}_A}}{\mathring{x}_A p}\right\}p_X(0)+\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\min\left\{\frac{1}{xp},\frac{1-q^{\mathring{x}_A}}{xp}\right\}p_X(x)\right] \\
&= \min\left\{\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\frac{\varphi(x)}{x},\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\frac{\varphi(x)}{x_A}\right\} \\
&\quad +|q-p\mu|\left[\frac{1-q^{\mathring{x}_A}}{\mathring{x}_A p}p_X(0)+\min\left\{\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\frac{p_X(x)}{xp},\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\frac{1-q^{\mathring{x}_A}}{\mathring{x}_A p}p_X(x)\right\}\right] \\
&= \min\left\{\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\frac{\varphi(x)}{x},\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\frac{\varphi(x)}{x_A}\right\} \\
&\quad +\left|\frac{q}{p}-\mu\right|\left[\frac{1-q^{\mathring{x}_A}}{\mathring{x}_A}p_X(0)+\min\left\{\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\frac{p_X(x)}{x},\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\frac{1-q^{\mathring{x}_A}}{\mathring{x}_A}p_X(x)\right\}\right] \\
&= \min\left\{\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\frac{\varphi(x)}{x},\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\frac{\varphi(x)}{x_A}\right\} \\
&\quad +\left|\frac{q}{p}-\mu\right|\min\left[\frac{1-q^{\mathring{x}_A}}{\mathring{x}_A}p_X(0)+\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\frac{p_X(x)}{x},\frac{1-q^{\mathring{x}_A}}{\mathring{x}_A}\left(p_X(0)+\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}p_X(x)\right)\right] \\
&= \min\left\{\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\frac{\varphi(x)}{x},\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\frac{\varphi(x)}{x_A}\right\} \\
&\quad +\left|\frac{q}{p}-\mu\right|\min\left[\frac{1-q^{\mathring{x}_A}}{\mathring{x}_A}p_X(0)+\sum_{x\in S(x)\setminus\{0\}}\frac{p_X(x)}{x},\frac{1-q^{\mathring{x}_A}}{\mathring{x}_A}\right] \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

จากอสมการ (4.3) จะได้ว่าอสมการ (4.1) เป็นจริง

และจากอสมการ (4.3) ถ้า $\frac{q}{p}=\mu$ จะได้ว่าอสมการ (4.2) เป็นจริง

เมื่อ $A=C_{x_0}$ โดยที่ $x_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ และ $f_{C_{x_0}}$ และ $\Delta f_{C_{x_0}}$ ที่ได้นิยามไว้ในสมการ (3.6) และ (3.7) ตามลำดับ โดยใช้บทตั้ง (3.2) จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2. สำหรับ $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จะได้ว่า

เมื่อ $x_0 = 0$ (Teerapabolarn, 2011)

$$d_{K_0}\left(X,G\right) \leq \sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}} \left|\frac{q}{x} - \frac{p\sigma^2 w(k)}{x\left(x+1\right)}\right| p_X(x) + \left|q - p\mu\right| \left\{ p_X(0), \sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}} \frac{p_X(x)}{x} \right\} \tag{4.4}$$

และถ้า $\frac{q}{p} = \mu$ จะได้ว่า

$$d_{K_0}\left(X,G\right) \leq \sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}} \left|\frac{q}{x} - \frac{p\sigma^2 w(k)}{x\left(x+1\right)}\right| p_X(x) \tag{4.5}$$

เมื่อ $x_0 > 0$

$$\begin{aligned} & d_{K_{x_0}}\left(X,G\right) \\ & \leq \min\left\{ \sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}} \frac{\varphi(x)\left(1-q^{x_0+1}\right)}{x+1} \max\left\{1, \frac{1}{\left(x_0+1\right)p}\right\}, \sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}} \frac{\varphi(x)\left(1-q^{x_0+1}\right)}{x_0+1} \max\left\{1, \frac{1}{\left(x_0+2\right)p}\right\} \right\} \\ & \qquad + \left|\frac{q}{p} - \mu\right| \left[\min\left\{ \frac{1-q^{x_0+1}}{\left(x_0+1\right)} p_X(0) + \sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}} \frac{\left(1-q^{x_0+1}\right) p_X(x)}{x}, \frac{1-q^{x_0+1}}{x_0+1} \right\} \right] \end{aligned} \tag{4.6}$$

และถ้า $\frac{q}{p} = \mu$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & d_{K_{x_0}}\left(X,G\right) \\ & \leq \min\left\{ \sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}} \frac{\varphi(x)\left(1-q^{x_0+1}\right)}{x+1} \max\left\{1, \frac{1}{\left(x_0+1\right)p}\right\}, \sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}} \frac{\varphi(x)\left(1-q^{x_0+1}\right)}{x_0+1} \max\left\{1, \frac{1}{\left(x_0+2\right)p}\right\} \right\} \end{aligned} \tag{4.7}$$

พิสูจน์ จาก Teerapabolarn (2011)

$$
\begin{aligned}
& d_{K_{x_0}}\left(X,G\right) \\
& \le \sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}} \varphi(x)\left|\Delta f_{C_{x_0}}(x)\right| + |q-p\mu|\left[\left|f_{C_{x_0}}(1)\right| p_X(0) + \sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}} \left|f_{C_{x_0}}(x)\right| p_X(x)\right] \\
& = \sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}} \varphi(x)\min\left[\frac{1-q^{x_0+1}}{x+1}\max\left\{1,\frac{1}{(x_0+1)p}\right\},\frac{1-q^{x_0+1}}{x_0+1}\max\left\{1,\frac{1}{(x_0+2)p}\right\}\right] \\
& \quad + |q-p\mu|\left[\frac{1-q^{x_0+1}}{(x_0+1)p}p_X(0) + \sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}} \min\left\{\frac{1-q^{x_0+1}}{xp},\frac{1-q^{x_0+1}}{(x_0+1)p}\right\}p_X(x)\right] \\
& = \sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}} \varphi(x)\min\left[\frac{1-q^{x_0+1}}{x+1}\max\left\{1,\frac{1}{(x_0+1)p}\right\},\frac{1-q^{x_0+1}}{x_0+1}\max\left\{1,\frac{1}{(x_0+2)p}\right\}\right] \\
& \quad + \left|\frac{q}{p}-\mu\right|\left[\frac{1-q^{x_0+1}}{(x_0+1)}p_X(0) + \sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}} \min\left\{\frac{1-q^{x_0+1}}{x},\frac{1-q^{x_0+1}}{(x_0+1)}\right\}p_X(x)\right] \\
& = \min\left[\sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}} \frac{\varphi(x)\left(1-q^{x_0+1}\right)}{x+1}\max\left\{1,\frac{1}{(x_0+1)p}\right\}, \sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}} \frac{\varphi(x)\left(1-q^{x_0+1}\right)}{x_0+1}\max\left\{1,\frac{1}{(x_0+2)p}\right\}\right] \\
& \quad + \left|\frac{q}{p}-\mu\right|\left[\frac{1-q^{x_0+1}}{(x_0+1)}p_X(0) + \min\left\{\sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}} \frac{\left(1-q^{x_0+1}\right)p_X(x)}{x}, \sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}} \frac{\left(1-q^{x_0+1}\right)p_X(x)}{(x_0+1)}\right\}\right] \\
& = \min\left[\sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}} \frac{\varphi(x)\left(1-q^{x_0+1}\right)}{x+1}\max\left\{1,\frac{1}{(x_0+1)p}\right\}, \sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}} \frac{\varphi(x)\left(1-q^{x_0+1}\right)}{x_0+1}\max\left\{1,\frac{1}{(x_0+2)p}\right\}\right] \\
& \quad + \left|\frac{q}{p}-\mu\right|\left[\min\left\{\frac{1-q^{x_0+1}}{(x_0+1)}p_X(0) + \sum_{x\in S(X)\backslash\{0\}} \frac{\left(1-q^{x_0+1}\right)p_X(x)}{x}, \frac{1-q^{x_0+1}}{x_0+1}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

จะได้ว่าอสมการ (4.6) เป็นจริง และถ้า $\frac{q}{p}=\mu$ จะได้ว่า อสมการ (4.7) เป็นจริง

การเปรียบเทียบผลการวิจัย

การเปรียบเทียบผลการวิจัยในการศึกษาครั้งนี้ คือ การเปรียบเทียบขอบเขตแบบใหม่ในอสมการ (4.1) และขอบเขตของ Teerapabolarn (2011) ในอสมการ (2.8) และเปรียบเทียบขอบเขตแบบใหม่ในอสมการ (4.6) เทียบกับขอบเขตของ Teerapabolarn (2011) ในอสมการ (2.14)
เนื่องจาก

$$\min\left\{\sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}}\frac{\varphi(x)}{x},\sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}}\frac{\varphi(x)}{x_A}\right\}+\left|\frac{q}{p}-\mu\right|\min\left\{\left[p_X(0)p+\sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}}\frac{p_X(x)}{x}\right],\frac{1-q^{x_A^\circ}}{x_A^\circ}\right\}$$
$$<\sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}}\frac{\left|(x+1)q-p\sigma^2w(x)\right|p_X(x)}{x}+\left|\frac{q}{p}-\mu\right|$$

สำหรับทุก $A\subseteq\mathbb{N}\cup\{0\}$ และ สำหรับทุก $x_0\in\mathbb{N}$

$$\min\left\{\sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}}\frac{\varphi(x)\left(1-q^{x_0+1}\right)}{x+1}\max\left\{1,\frac{1}{(x_0+1)p}\right\},\sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}}\frac{\varphi(x)\left(1-q^{x_0+1}\right)}{x_0+1}\max\left\{1,\frac{1}{(x_0+2)p}\right\}\right\}$$
$$+\left|\frac{q}{p}-\mu\right|\left(1-q^{x_0+1}\right)\left[\min\left\{\frac{p_X(0)}{x_0+1}+\sum_{x\in S(X)\setminus\{0\}}\frac{p_X(x)}{x},\frac{1}{x_0+1}\right\}\right]$$
$$<\frac{1}{x_0+1}\left\{\sum_{x\in S(X)}\left|(x+1)q-p\sigma^2w(x)\right|p_X(x)+\left|\frac{q}{p}-\mu\right|\right\}$$

ดังนั้นจะได้ว่าขอบเขตแบบใหม่ในอสมการ (4.1) มีค่าผลต่างของการประมาณน้อยกว่าขอบเขตของTeerapabolarn (2011) ในอสมการ (2.8) สำหรับทุก $A\subseteq\mathbb{N}\cup\{0\}$ และขอบเขตแบบใหม่ในอสมการ (4.6) มีค่าผลต่างของการประมาณน้อยกว่าขอบเขตของ Teerapabolarn (2011) ในอสมการ (2.14) สำหรับทุก $x_0\in\mathbb{N}$

การประยุกต์ใช้ผลการวิจัย

การประยุกต์ใช้ผลการวิจัยในการศึกษาครั้งนี้เป็นการนำผลลัพธ์ที่ได้ในทฤษฎีบท 4.1 และ 4.2 ไปประยุกต์ใช้กับการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบด้วยการแจกแจงเรขาคณิต ซึ่งการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบที่เราจะนำมาประมาณนั้น ได้แก่ การแจกแจงเรขาคณิตไฮเพอร์ลบ การแจกแจงโพลยา และการแจกแจงโพลยาลบ

การแจกแจงเรขาคณิตไฮเพอร์ลบ

สมมติให้กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีขาว n ลูก เป็นลูกบอลสีดำ $N-n$ ลูก ทำการสุ่มหยิบลูกบอลมาหนึ่งลูกแบบไม่ใส่คืน กำหนดให้ X แทนจำนวนลูกบอลสีขาวที่ถูกสุ่มหยิบได้ก่อนที่ได้ลูกบอลสีดำ จะกล่าวได้ว่า X เป็นตัวแปรสุ่มเรขาคณิตไฮเพอร์ลบที่มีพารามิเตอร์ n และ N และมีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น ดังนี้

$$p_X(x) = \frac{\binom{N-x-1}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \; x = 0,1,\ldots,n \tag{4.8}$$

โดยมี $\mu = E(X) = \frac{n}{N-n+1}$ และ $\sigma^2 = Var(X) = \frac{n(N-n)(N+1)}{(N-n+1)^2(N-n+2)}$

จากอสมการ (2.3) และ (2.4) จะได้ว่าฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มเรขาคณิตไฮเพอร์ลบคือ $w(x) = \frac{(x+1)(n-x)}{(N-n+1)\sigma^2}$ กำหนดให้ $p = \frac{N-n+1}{N+1}$ แทนค่า p ลงในทฤษฎีบท 4.1 และ 4.2 จะได้ผลลัพธ์ ดังนี้

บทแทรก 4.1 ให้ $p = \frac{N-n+1}{N+1}$ จะได้ว่า

1. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$d_A(X,G) \le \frac{n}{N-n+1} \min\left\{ \frac{2N-n+1}{N(N+1)}, \frac{2}{(N-n+2)x_A} \right\} \tag{4.9}$$

2. สำหรับ $x_0 = 0$

$$d_0(X,G) \le \frac{n}{N(N+1)} \tag{4.10}$$

3. สำหรับ $x_0 \in \mathbb{N}$

$$d_{K_{x_0}}(X,G) \le \frac{n\left(1-q^{x_0+1}\right)}{N-n+1} \min\left\{ \frac{1}{N+1}\max\left\{1, \frac{1}{(x_0+1)p}\right\}, \frac{2}{N-n+2}\max\left\{ \frac{1}{(x_0+1)}, \frac{1}{(x_0+1)(x_0+2)p} \right\} \right\} \tag{4.11}$$

จากอสมการ (4.9) – (4.11) การประมาณการแจกแจงเรขาคณิตไฮเปอร์ลบด้วยการแจกแจงเรขาคณิตจะให้ผลการประมาณที่ดีเมื่อ N มีค่ามาก

การแจกแจงโพลยา

สมมุติว่าถุงใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีขาวหนึ่งลูกและลูกบอลสีแดง $N-1$ ลูก สุ่มหยิบลูกบอลขึ้นมาหนึ่งลูกแล้วใส่กลับคืนลงในถุงพร้อมใส่ลูกบอลสีเดียวกันกลับที่สุ่มได้อีกหนึ่งลูกลงในถุง สุ่มหยิบลูกบอลในลักษณะนี้เป็นจำนวน n ครั้ง กำหนดให้ X เป็นจำนวนครั้งที่สุ่มหยิบได้ลูกบอลขาว จากการสุ่มทั้งหมด n ครั้ง ดังนั้นจะกล่าวได้ว่า X มีการแจกแจงโพลยา และมีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นดังนี้

$$p_X(x) = \frac{\binom{N+n-x-2}{n-x}}{\binom{N+n-1}{n}},\ x = 0,\dots,n \tag{4.12}$$

และมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน คือ $\mu = \frac{n}{N}$ และ $\sigma^2 = \frac{n(N+n)(N-1)}{(N+1)N^2}$ ตามลำดับจากสมการ (2.3) และ (2.4) จะได้ว่าฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มโพลยา คือ $w(x) = \frac{(x+1)(n-x)}{N\sigma^2}$ ให้ $p = \frac{N}{N+n}$ และแทนค่า p ลงใน ทฤษฎีบท 4.1 และ 4.2 ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

บทแทรก 4.2 ให้ $p = \frac{N}{N+n}$ แล้วจะได้ว่า

1. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$d_A(X,G) \le \frac{n}{N} \min\left\{ \frac{2N+n-1}{(N+n)(N+n-1)}, \frac{2}{(N+1)x_A} \right\} \tag{4.13}$$

2. สำหรับ $x_0 = 0$

$$d_0(X,G) \le \frac{n}{(N+n)(N+n-1)} \tag{4.14}$$

3. สำหรับ $x_0 \in \mathbb{N}$

$$d_{K_{x_0}}(X,G) \le \frac{n\left(1-q^{x_0+1}\right)}{N} \min\left\{ \frac{1}{N+n} \max\left\{1, \frac{1}{(x_0+1)p}\right\}, \right.$$
$$\left. \frac{2}{N+1} \max\left\{ \frac{1}{(x_0+1)}, \frac{1}{(x_0+1)(x_0+2)p} \right\} \right\} \tag{4.15}$$

จากอสมการ (4.13) – (4.15) าการประมาณการแจกแจงโพลยาด้วยการแจกแจงเรขาคณิตจะให้ผลการประมาณที่ดีเมื่อ N มีค่ามาก

การแจกแจงโพลยาลบ

สมมุติว่าหีบใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง m ลูก และลูกบอลสีดำ n ลูก สุ่มหยิบลูกบอลขึ้นมาหนึ่งลูกแล้วใส่กลับคืนพร้อมกับเพิ่มลูกบอลสีเดียวกันลงไปในหีบ ทำซ้ำเช่นนี้จนได้ลูกบอลสีแดงลูกแรก กำหนดให้ X คือ จำนวนลูกบอลสีดำก่อนที่จะได้ลูกบอลสีแดง ดังนั้นจะกล่าวได้ว่า X มีการแจกแจงโพลยาลบที่มีพารามิเตอร์ n และ m โดยมีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นดังนี้

$$p_X(x) = \frac{(n+x-1)!(n+m-1)!m}{(n-1)!(n+m+x)!},\ x = 0,1,2,... \tag{4.16}$$

และมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน คือ $\mu = \dfrac{n}{m-1}$ และ $\sigma^2 = \dfrac{nm(n+m-1)}{(m-2)(m-1)^2}$ ตามลำดับจากสมการ (2.3) และ (2.4) จะได้ว่าฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มโพลยาลบ คือ $w(x) = \dfrac{(x+1)(n+x)}{(m-1)\sigma^2}$ ให้ $p = \dfrac{m-1}{n+m-1}$ และแทนค่า p ลงใน ทฤษฎีบท 4.1 และ 4.2 ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

บทแทรก 4.3 ให้ $p = \dfrac{m-1}{n+m-1}$ แล้วจะได้ว่า

1. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$d_A(X,G) \le \frac{n}{m-1}\min\left\{\frac{2m+n+1}{(n+m-1)(n+m)}, \frac{2}{(m-2)x_A}\right\} \tag{4.17}$$

2. สำหรับ $x_0 = 0$

$$d_0(X,G) \le \frac{n}{(m-1)(m+n)} \tag{4.18}$$

3. สำหรับ $x_0 \in \mathbb{N}$

$$d_{K_{x_0}}\left(X,G\right) \le \frac{n\left(1-q^{x_0+1}\right)}{m-1}\min\left\{\frac{1}{n+m-1}\max\left\{1,\frac{1}{\left(x_0+1\right)p}\right\},\right.$$
$$\left.\frac{2}{m-2}\max\left\{\frac{1}{\left(x_0+1\right)},\frac{1}{\left(x_0+1\right)\left(x_0+2\right)p}\right\}\right\} \tag{4.19}$$

จากอสมการ (4.17) – (4.19) การประมาณการแจกแจงโพลยาลบด้วยการแจกแจงเรขาคณิตจะให้ผลการประมาณที่ดีเมื่อ m มีค่ามาก

บทที่ 5
สรุปและอภิปรายผล

สรุปและอภิปรายผล

การศึกษาในครั้งนี้ใช้วิธีของสไตน์และฟังก์ชัน w หาขอบเขตไม่เอกรูปสำหรับการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบด้วยการแจกแจงเรขาคณิต และปรับปรุงขอบเขตไม่เอกรูปสำหรับการประมาณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบด้วยฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มเรขาคณิต เมื่อเปรียบเทียบขอบเขตไม่เอกรูปแบบใหม่ที่ได้จากการศึกษาครั้งนี้กับขอบเขตไม่เอกรูปแบบเดิมของ Teerapabolarn (2011) จะพบว่าขอบเขตไม่เอกรูปแบบใหม่ดีกว่าขอบเขตไม่เอกรูปแบบเดิมในงานวิจัยของ Teerapabolarn (2011) นั่นคือ ขอบเขตไม่เอกรูปแบบใหม่เป็นเกณฑ์ที่ใช้วัดความแม่นยำของการประมาณได้ดีกว่าขอบเขตแบบเดิม นอกจากนี้ในการวัดความแม่นยำของการประมาณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบด้วยฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มเรขาคณิต เกณฑ์แบบใหม่จะไม่มีข้อจำกัดเกี่ยวกับค่าของ q ที่อยู่ในช่วง $(0,\frac{1}{2}]$ หรือ $(0,\frac{2}{3}]$ เหมือนกับในงานวิจัยของ Teerapabolarn (2011) แต่สามารถใช้ได้กับทุกค่าของ $q \in (0,1)$ และสำหรับในการประยุกต์ใช้ผลลัพธ์ การศึกษาครั้งนี้ได้นำผลลัพธ์ที่หาได้ไปประมาณการแจกแจงเรขาคณิตไฮเพอร์ลบ โพลยา และโพลยานิเสธ ซึ่งผลการประยุกต์ที่ได้ดีกว่าผลการประยุกต์ในงานวิจัยของ Teerapabolarn (2011) เช่นเดียวกัน

บรรณานุกรม

พิม มะลิงาม และคณินทร์ ธีรภาพโอฬาร. (2554). การประมาณเราขาคณิตแบบจุดโดยใช้ฟังก์ชัน w. *วารสารวิทยาศาสตร์ มข.*, *39*(3), 490-501.

Barbour, A. D., & Grübel, R. (1995). The first divisible sum. *Journal of Theoretical Probability*, *8*(1), 39-47.

Brown, T. C., & Phillips, M. J. (1999). Negative binomial approximaition with Stein's method. *Methodology and Computing in Applied Probability*, *1*(4), 407-421.

Cacoullos, T., & Papathanasiou, V. (1989). Characterization of distributions by variance bounds. *Statistics & Probability Letters*, *7*(5), 351-356.

Chen, L. H. Y. (1975). Poisson approximation for dependent trials. *Annals of Probability*, *3*(3), 535-545.

Law, A. M., & Kelton, W. D. (1991). *Simulation modeling and analysis* (2nd ed.). New York: McGraw-Hill.

Majsnerowska, M. (1998). A note on Poisson approximation by *w*-functions. *Applicationes Mathematicae*, *25*(3), 387-392.

Peköz, E. (1996). Stein's method for geometric approximation. *Journal of Applied Probability*, *33*(3), 707-713.

Peköz, E., Röllin, A., & Ross, N. (2013). Total variation error bounds for geometric approximation. *Bernoulli, 19*(2), 610-632.

Phillips, M. J., & Weinberg, G. V. (2000). Non-uniform bounds for geometric approximation. *Statistics & Probability Letters*, *49*(3), 305-311.

Serfling, R. J. (1975). A general Poisson approximation theorem. *Annals of Probability*, *3*(4), 726-731.

Stein, C. M. (1972). A bound for the error in normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (pp. 583-602). Berkeley: University of California Press.

Teerapabolarn, K. (2008). On the geometric approximation to the Polya distribution. *International Mathematical Forum*, *3*(28), 1359-1362.

Teerapabolarn, K. (2011). Non uniform bounds on geometric approximation via Stein's method a *w*-functions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, *40*(1), 145-158.

Teerapabolarn, K. (2013). Am improved bound on geometric approximation by *w*-functions. *International journal of pure and applied mathematics, 84*(4), 365-370.