วารสารวิทยาศาสตร์บูรพา ปีที่ 26 (ฉบับที่ 1) มกราคม – เมษายน พ.ศ. 2564
BURAPHA SCIENCE JOURNAL Volume 26 (No.1) January – April 2021 บทความวิจัย

วิธีการแยกเชฮูอโดเมียนสำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วน

Shehu Adomian Decomposition Method for Solving Fractional Integro-Differential Equation

สินทรัพย์ นับเพชรพลอย[1*], ปิยธิดา ต.ไชยสุวรรณ[1] และ ดวงกมล ผลเต็ม[2]

Sinsup Nubpetchploy[1*], Piyatida T.Chaisuwan[1] and Duangkamol Poltem[2]

[1] *คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลตะวันออก*

[2] *ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา*

[1]*Faculty of Science and Technology, Rajamangala University of Technology Tawan-ok*

[2]*Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University*

Received : 1 May 2020

Revised : 29 June 2020

Accepted : 9 July 2020

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้ นำการแปลงเชฮูมาประยุกต์ร่วมกับวิธีการแยกอโดเมียน เพื่อหาผลเฉลยแบบประมาณค่าของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโวลเทอรา และสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโวลเทอรา-เฟรดฮอล์มแบบไม่เชิงเส้นที่มีอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต ผลการวิจัยพบว่าวิธีการที่พัฒนาขึ้นสามารถนำไปใช้หาผลเฉลยแบบประมาณค่าได้อย่างมีประสิทธิภาพ

คำสำคัญ : การแปลงเชฮู ; พหุนามอโดเมียน ; สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์ ; อนุพันธ์เชิงเศษส่วน

Abstract

In this paper, we apply Shehu transform and Adomian decomposition method to find the approximate solution of nonlinear fractional Volterra integro-differential and fractional Volterra-Fredholm integro-differential equation. The fractional derivative is described in Caputo sense. Finally, we provide some applications to validate the efficiency and the high accuracy of this technique.

Keywords : Shehu transform ; Adomian polynomial ; integro-differential equation ; fractional derivative

***Corresponding author. E-mail** : sinsap_sa@rmutto.ac.th

บทนำ

ในงานวิจัยฉบับนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาการหาผลเฉลยโดยใช้การแปลงเชฮูร่วมกับวิธีการแยกอโดเมียน พร้อมยกตัวอย่างสำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโวลเทอราแบบไม่เชิงเส้น

$$ {}^{c}D_{x}^{\alpha} y(x) = p(x)y(x) + g(x) + \int_{0}^{x} K(x,t)F(y(t))dt \qquad (1) $$

สำหรับ $t \in H = [0,1]$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y^{(n)} = \delta_i$, $i = 0,1,2,\ldots,n-1$, $n-1 < \alpha \le n$, $n \in N$ และ $\delta_i \in R$ เมื่อ $p : H \to R$, $g : H \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทราบค่า โดยที่ $K : H \times H \to R$ แทนเคอร์แนลของสมการเชิงปริพันธ์ และ $F : R \to R$ เป็นฟังก์ชันของ y

และสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโวลเทอรา-เฟรดฮอล์มแบบไม่เชิงเส้น

$$ \begin{aligned} {}^{c}D_{x}^{\alpha} y(x) = {} & p(x)y(x) + g(x) + \int_{0}^{x} K_1(x,t)\big(G_1(y(t)) + F_1(y(t))\big)dt \\ & + \int_{0}^{1} K_2(x,t)\big(G_2(y(t)) + F_2(y(t))\big)dt \end{aligned} \qquad (2) $$

สำหรับ $t \in H = [0,1]$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y^{(n)} = \delta_i$, $i = 0,1,2,\ldots,n-1$, $n-1 < \alpha \le n$, $n \in N$ และ $\delta_i \in R$ เมื่อ $p : H \to R$, $g : H \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทราบค่า โดยที่ $K_1 : H \times H \to R$, $K_2 : H \times H \to R$ แทนเคอร์แนลของสมการเชิงปริพันธ์และ $F_1 : R \to R$, $F_2 : R \to R$ เป็นฟังก์ชันของ y

ซึ่งสมการดังกล่าวมีแนวคิดเริ่มต้นมาจากความต้องการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ให้มีรูปแบบอนุพันธ์เชิงเศษส่วนเพื่อใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์ทางกายภาพ เช่น ความยืดหยุ่นของวัสดุ ความเค้น ความเครียด เป็นต้น (Caputo, 1967)

การหาผลเฉลยของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จำเป็นต้องพิจารณาการเลือกใช้วิธีให้มีความเหมาะสมกับเงื่อนไขของปัญหาที่สนใจ โดยในปัจจุบันมีวิธีการหาผลเฉลยที่มีประสิทธิภาพและได้รับความนิยมอยู่หลายวิธี เช่น วิธีการแยกอโดเมียน (Duan *et al.*, 2012) วิธีการทำซ้ำ(Nor & Pakistan, 2008) เป็นต้น สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่มีอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์รูปแบบหนึ่งที่มีผู้ให้ความสนใจและพัฒนาวิธีต่าง ๆ เพื่อใช้หาผลเฉลยของปัญหาดังกล่าว เช่น วิธีเลอจองด์เวฟเลท (Rawashdeh, 2011) วิธีโฮโมโทปีเพอเทอร์เบชัน (Das *et al.*, 2018) วิธีการแปลงลาปลาซร่วมกับวิธีการแยกอโดเมียน (Yang & Hou, 2013; Hamoud & Ghadle, 2018) นอกจากนี้ยังมีผู้ที่สนใจการศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการมีจริงและมีเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยที่มีรูปแบบสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโดยได้แสดงผลการวิเคราะห์ด้วยการหาผลเฉลยโดยใช้วิธีต่าง ๆ เช่น การปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน (Hamoud *et al.*, 2018) วิธีโฮโมโทปีเพอเทอร์เบชัน (Hamoud *et al.*, 2018) เป็นต้น

สำหรับการหาผลเฉลยของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น จะนิยมใช้การแปลงทางคณิตศาสตร์เพื่อช่วยในการหาผลเฉลย ซึ่งในปัจจุบันมีการแปลงทางคณิตศาสตร์หลายรูปแบบ เช่น การแปลงลาปลาซ การแปลงปริพันธ์ฟูเรีย การแปลงธรรมชาติ การแปลงเซฮู (Maitama & Zhao, 2019) โดยในช่วงที่ผ่านมามีผู้ที่สนใจทำการศึกษาเกี่ยวกับการแปลงเซฮูเพื่อสร้างทฤษฎีที่เกี่ยวข้องและนำไปพัฒนาองค์ความรู้สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับเศษส่วน (Belgacem *et al.*, 2019; Qureshi & Kumar, 2019) รวมถึงการนำวิธีการแปลงเซฮุไปประยุกต์ใช้ร่วมกับวิธีที่มีอยู่ในปัจจุบันเพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับเศษส่วนที่มีความซับซ้อน เช่น การแปลงเซฮูร่วมกับวิธีการวิเคราะห์โฮโมโทปี (Maitama & Zhao, 2019) การแปลงเซฮูร่วมกับวิธีการแยกอโดเมียน (Khan *et al.*, 2020) ซึ่งจากผลการวิจัยดังกล่าวพบว่าการแปลงเซฮูสามารถนำไปใช้หาผลเฉลยของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพและสามารถนำไปใช้ในการพัฒนาองค์ความรู้ต่อไป

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยเพื่อพัฒนาองค์ความรู้สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตผู้วิจัยได้กำหนดวิธีการดำเนินการวิจัย ดังนี้

1. ค้นคว้าและรวบรวมเอกสารที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตและการแปลงเซฮู โดยมีนิยามและทฤษฎีที่สำคัญ ดังนี้

นิยาม 1 (Qureshi & Kumar, 2019) ปริพันธ์เชิงเศษส่วนรีมันน์-ลียูวิลล์ อันดับ $\alpha > 0$ ของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย

$$J^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > 0$$

เมื่อ $\Gamma(\cdot)$ คือฟังก์ชันแกมมาออยเลอร์

นิยาม 2 (Qureshi & Kumar, 2019) อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตของ $f(x)$ นิยามโดย

$${}^{c}D_x^{\alpha} f(x) = J^{n-\alpha} D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt, \quad n-1 < \alpha \le n \in N$$

นิยาม 3 (Maitama & Zhao, 2019) ถ้า $y(x)$ เป็นฟังก์ชันอันดับเลขชี้กำลังนิยามบนเซต

$$A = \left\{ y(x) : \exists N, \eta_1, \eta_2 > 0, |y(x)| < N e^{\left(\frac{|x|}{\eta_i}\right)}, x \in (-1)^i \times [0, \infty) \right\}$$

แล้วการแปลงเซฮูของฟังก์ชัน $y(x)$ เขียนแทนด้วย $\mathbf{S}[y(x)]$ กำหนดโดย

$$\mathbf{S}[y(x)] = V(s,u) = \int_0^{\infty} e^{\left(\frac{-sx}{u}\right)} y(x)dx$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} \int_0^{\alpha} e^{\left(\frac{-sx}{u}\right)} y(x)dx, \quad s, u > 0$$

และเรียก $y(x) = \mathbf{S}^{-1}[V(s,u)]$ สำหรับ $x > 0$ ว่าการแปลงเซฮูผกผัน กำหนดโดย

$$y(x) = \mathbf{S}^{-1}\left[V(s,u)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{1}{u} e^{\left(\frac{-sx}{u}\right)} V(s,u)\,ds$$

เมื่อ s และ u เป็นพารามิเตอร์ของการแปลงเซฮู

โดยตัวอย่างผลการแปลงเซฮูและสมบัติที่สำคัญมีดังนี้

(1) $\mathbf{S}[1] = \dfrac{u}{s}$

(2) $\mathbf{S}[x] = \dfrac{u^2}{s^2}$

(3) $\mathbf{S}\left[\dfrac{x^n}{n!}\right] = \left(\dfrac{u}{s}\right)^{n+1}, \quad n = 0,1,2,\ldots$

(4) $\mathbf{S}\left[\dfrac{x^n}{\Gamma(n+1)}\right] = \left(\dfrac{u}{s}\right)^{n+1}, \quad n > -1$

(5) $\mathbf{S}\left[e^{\beta x}\right] = \dfrac{u}{s - \beta u}$

(6) $\mathbf{S}[y(\beta x)] = \dfrac{u}{\beta} V\left(\dfrac{s}{\beta}, u\right)$

(7) $\mathbf{S}\left[y^{(n)}(x)\right] = \dfrac{s^n}{u^n} V(s,u) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{s}{u}\right)^{n-k-1} y^{(k)}(0)$

(8) $\mathbf{S}[\beta y(x) + \varphi w(x)] = \beta \mathbf{S}[y(x)] + \varphi \mathbf{S}[w(x)]$ เป็นสมบัติการแปลงเชิงเส้น

ทฤษฎีบท 1 (Qureshi & Kumar, 2019) ถ้า $V(s,u)$ เป็นการแปลงเซฮูของฟังก์ชัน $y(x)$ แล้วการแปลงเซฮูของอนุพันธ์เชิงเศษส่วนคาปูโต สำหรับ $y(x)$ อันดับ $\alpha > 0$ กำหนดโดย

$$\mathbf{S}\left[{}^{c}D_{x}^{\alpha} y(x)\right] = \left(\frac{s}{u}\right)^{\alpha} V(s,u) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{\alpha - k - 1} y^{(k)}(0) \tag{3}$$

ทฤษฎีบท 2 (Belgacem *et al.*, 2019) ให้ $y(x)$ และ $w(x)$ เป็นฟังก์ชันบนเซต A ที่มีการแปลงเซฮู $V(s,u)$ และ $W(s,u)$ แล้วการแปลงเซฮูของปริพันธ์สังวัตนาการ (convolution) ฟังก์ชัน y และ w เขียนแทนด้วย

$$(y * w)(x) = \int_0^x y(t)w(x-t)\,dt$$

กำหนดโดย

$$\mathbf{S}\left[(y * w)(x)\right] = V(s,u)W(s,u) \tag{4}$$

2. รวบรวมความรู้พื้นฐานและข้อมูลที่ได้จากการค้นคว้า เพื่อกำหนดวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโวลเทอราแบบไม่เชิงเส้น โดยใช้การแปลงเซฮูร่วมกับวิธีการแยกอโดเมียน ซึ่งมีแนวคิดดังนี้

พิจารณาเงื่อนไขสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโวลเทอรา และทำการแปลงเซฮูทั้งสองข้างของ (1) จะได้

$$\mathbf{S}\left[{}^{c}D_{x}^{\alpha}y(x)\right]=\mathbf{S}\left[p(x)y(x)\right]+\mathbf{S}\left[g(x)\right]+\mathbf{S}\left[\int_{0}^{x}K(x,t)F(y(t))dt\right] \tag{5}$$

แทน (3) ใน (5) จะได้

$$\left(\frac{s}{u}\right)^{\alpha}V(s,u)-c=\mathbf{S}\left[p(x)y(x)\right]+\mathbf{S}\left[g(x)\right]+\mathbf{S}\left[\int_{0}^{x}K(x,t)F(y(t))dt\right] \tag{6}$$

เมื่อ $c=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{s}{u}\right)^{\alpha-k-1}y^{(k)}(0)$

จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$V(s,u)=\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\left[c+\mathbf{S}\left(g(x)\right)\right]+\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}\left[p(x)y(x)\right]+\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}\left[\int_{0}^{x}K(x,t)F(y(t))dt\right] \tag{7}$$

กำหนดผลเฉลย $y(x)$ ในรูปของอนุกรมอนันต์ $$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}y_m \tag{8}$$

และสำหรับฟังก์ชันไม่เชิงเส้น F กำหนดโดย $$F=\sum_{m=0}^{\infty}A_m \tag{9}$$

เมื่อ A_m คือพหุนามอโดเมียน (Hamoud, Abdo, *et al.*, 2018) ของ $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$ กำหนดโดย

$$A_m=\frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{d\lambda^m}F\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i\right)\right]_{\lambda=0}, \quad m=0,1,2,\ldots$$

สำหรับฟังก์ชันไม่เชิงเส้น F จะได้พหุนามอโดเมียน กำหนดโดย

$$
\begin{aligned}
A_0 &= F(y_0),\\
A_1 &= y_1 F^{(1)}(y_0),\\
A_2 &= y_2 F^{(1)}(y_0) + \frac{1}{2!} y_1^{\,2} F^{(2)}(y_0),\\
A_3 &= y_3 F^{(1)}(y_0) + y_1 y_2 F^{(2)}(y_0) + \frac{1}{3!} y_1^{\,3} F^{(3)}(y_0),\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

โดยการแทนค่า (9) ใน (7) จะได้

$$V(s,u) = \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \left[c + \mathbf{S}[g(x)]\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \mathbf{S}[p(x)y(x)] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \mathbf{S}\left[\int_0^x K(x,t)\sum_{m=0}^{\infty} A_m \, dt\right] \tag{10}$$

ทำการแปลงเซฮูผกผันทั้งสองข้างของ (10) และแทน (8) จะได้

$$\sum_{m=0}^{\infty} y_m = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \left(c + \mathbf{S}[g(x)]\right)\right] + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \mathbf{S}\left[p(x)\sum_{m=0}^{\infty} y_m\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \mathbf{S}\left[\int_0^x K(x,t)\sum_{m=0}^{\infty} A_m dt\right]\right] \tag{11}$$

ทำการเทียบพจน์ทั้งสองข้างของ (11) โดยกำหนดความสัมพันธ์ดังนี้

$$y_0 = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \left(c + \mathbf{S}[g(x)]\right)\right] \tag{12}$$

$$y_{m+1} = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \mathbf{S}[p(x)y_m] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \mathbf{S}\left[\int_0^x K(x,t)A_m dt\right]\right] \tag{13}$$

จากแนวคิดของการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียน (Wazwaz, 1999) สำหรับการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์ (12) และ (13) พบว่าการกำหนด y_0 มีความสำคัญอย่างมาก ถ้า y_0 มีหลายพจน์อาจทำให้การหาผลเฉลยมีความยุกย่าง เพื่อลดความซับซ้อนดังกล่าว เราจะกำหนด $R(x)$ แทนฟังก์ชันใน (12) โดยที่

$$R(x) = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \left(c + \mathbf{S}[g(x)]\right)\right]$$

และทำการแบ่ง $R(x)$ ออกเป็นสองส่วน คือ $R_1(x)$ และ $R_2(x)$ ซึ่งโดยทั่วไปควรกำหนด $R_1(x)$ ให้มีจำนวนพจน์น้อยที่สุดเท่าที่จะทำได้เพื่อกำหนดเป็นผลเฉลยเริ่มต้น y_0 ของการกำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิดใหม่ ส่วนพจน์ที่เหลือของ $R(x)$ ให้กำหนดเป็น $R_2(x)$ โดยที่ $R(x) = R_1(x) + R_2(x)$ จากนั้นปรับความสัมพันธ์ของ (12) และ (13) ใหม่ดังนี้

$$y_0 = R_1(x) \tag{14}$$

$$y_1 = R_2(x) + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \mathbf{S}\left[p(x)y_0\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \mathbf{S}\left[\int_0^x K(x,t)A_0\,dt\right]\right] \tag{15}$$

$$y_{m+1} = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \mathbf{S}\left[p(x)y_m\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \mathbf{S}\left[\int_0^x K(x,t)A_m\,dt\right]\right], \quad m = 1,2,3,\ldots \tag{16}$$

3. กำหนดวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโวลเทอรา-เฟรดฮอล์มแบบไม่เชิงเส้น โดยทำการแปลงเชฮูทั้งสองข้างของสมการ (2) จะได้

$$\mathbf{S}\left[{}^{c}D_x^{\alpha} y(x)\right] = \mathbf{S}\left[p(x)y(x)\right] + \mathbf{S}\left[g(x)\right] + \mathbf{S}\left[\int_0^x K_1(x,t)F_1(y(t))\,dt\right] + \mathbf{S}\left[\int_0^1 K_2(x,t)F_2(y(t))\,dt\right] \tag{17}$$

ในทำนองเดียวกับการหาผลเฉลยในข้อ 2 จะได้

$$\begin{aligned} V(s,u) = {} & \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\left[c + \mathbf{S}\left(g(x)\right)\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \mathbf{S}\left[p(x)y(x)\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \mathbf{S}\left[\int_0^x K_1(x,t)F_1(y(t))\,dt\right] \\ & + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \mathbf{S}\left[\int_0^1 K_2(x,t)F_2(y(t))\,dt\right] \end{aligned} \tag{18}$$

กำหนดผลเฉลย

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m \tag{19}$$

สำหรับฟังก์ชันไม่เชิงเส้น F_1 และ F_2 กำหนดโดย

$$F_1 = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \quad \text{และ} \quad F_2 = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \tag{20}$$

เมื่อ A_m และ B_m คือพหุนามอโดเมียนของ $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$ กำหนดโดย

$$A_m = \frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{d\lambda^m} F_1\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i\right)\right]_{\lambda=0} \quad \text{และ} \quad B_m = \frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{d\lambda^m} F_2\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i\right)\right]_{\lambda=0}$$

สำหรับ $m = 0,1,2,\ldots$

แทนค่า (20) ใน (18) จะได้

$$V(s,u) = \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\left(c + \mathbf{S}[g(x)]\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}[p(x)y(x)] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}\left[\int_0^x K_1(x,t)\sum_{m=0}^{\infty}A_m\,dt\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}\left[\int_0^1 K_2(x,t)\sum_{m=0}^{\infty}B_m\,dt\right] \tag{21}$$

ทำการแปลงเชฮูผกผันทั้งสองข้างของ (21) และแทนค่า (19) จะได้

$$\sum_{m=0}^{\infty} y_m = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\left(c + \mathbf{S}[g(x)]\right)\right] + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}\left[p(x)\sum_{m=0}^{\infty}y_m\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}\left[\int_0^x K_1(x,t)\sum_{m=0}^{\infty}A_m\,dt\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}\left[\int_0^1 K_2(x,t)\sum_{m=0}^{\infty}B_m\,dt\right]\right] \tag{22}$$

ทำการเทียบทั้งสองข้างของ (22) จะได้ความสัมพันธ์

$$y_0 = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\left(c + \mathbf{S}[g(x)]\right)\right] = R(x) \tag{23}$$

$$y_{m+1} = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}[p(x)y_m] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}\left[\int_0^x K_1(x,t)A_m\,dt\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}\left[\int_0^1 K_2(x,t)B_m\,dt\right]\right] \tag{24}$$

กำหนด $R(x) = R_1(x) + R_2(x)$ ในทำนองเดียวกับการหาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโวลเทอรา จากนั้นปรับความสัมพันธ์ของ (23) และ (24) ใหม่ดังนี้

$$y_0 = R_1(x) \tag{25}$$

$$y_1 = R_2(x) + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}[p(x)y_0] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}\left[\int_0^x K_1(x,t)A_0\,dt\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}\left[\int_0^1 K_2(x,t)B_0\,dt\right]\right] \tag{26}$$

$$y_{m+1} = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}[p(x)y_m] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}\left[\int_0^x K_1(x,t)A_m\,dt\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}\mathbf{S}\left[\int_0^1 K_2(x,t)B_m\,dt\right]\right], \quad m = 1,2,3,\ldots \tag{27}$$

ผลการวิจัย

จากวิธีการที่ได้พัฒนาขึ้นนั้น สามารถนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่มีอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 แสดงการหาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโวลเทอรา

$$ {}^{c}D_{x}^{3/4} y(x) = xy(x) - \frac{x^{1/4}}{\Gamma(5/4)} - x^2 - x - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \int_0^x xt\, y(t)dt \tag{28} $$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0)=1$ และมีผลเฉลยแม่นตรง $y(x) = x+1$

ทำการแปลงเซฮูทั้งสองข้างของสมการ (28)

$$ \mathbf{S}\left[{}^{c}D_{x}^{3/4} y(x) \right] = \mathbf{S}\left[-\frac{x^{1/4}}{\Gamma(5/4)} - x^2 - x - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \right] + \mathbf{S}\left[xy(x) + \int_0^x xt\, y(t)dt \right] \tag{29} $$

ใช้สมบัติการแปลงเซฮูและแทนค่าเงื่อนไขค่าเริ่มต้นใน (29) จะได้

$$ \left(\frac{s}{u}\right)^{3/4} V(s,u) - \left(\frac{u}{s}\right)^{1/4} = \mathbf{S}\left[-\frac{x^{1/4}}{\Gamma(5/4)} - x^2 - x - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \right] + \mathbf{S}\left[xy(x) + \int_0^x xt\, y(t)dt \right] \tag{30} $$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$ V(s,u) = \left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^{3/4} \mathbf{S}\left[-\frac{x^{1/4}}{\Gamma(5/4)} - x^2 - x - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{3/4} \mathbf{S}\left[xy(x) + \int_0^x xt\, y(t)dt \right] \tag{31} $$

ทำการแปลงเซฮูผกผันทั้งสองข้างของ (31) และแทน (8) จะได้

$$ \begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} y_m &= 1 + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{3/4} \mathbf{S}\left[-\frac{x^{1/4}}{\Gamma(5/4)} - x^2 - x - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \right] \right] \\ &\quad + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{3/4} \mathbf{S}\left[x\sum_{m=0}^{\infty} y_m + \int_0^x xt \sum_{m=0}^{\infty} y_m(t)dt \right] \right] \end{aligned} \tag{32} $$

เทียบทั้งสองข้างของ (32) จะได้ความสัมพันธ์

$$y_0 = 1 + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{3/4}\mathbf{S}\left[-\frac{x^{1/4}}{\Gamma(5/4)} - x^2 - x - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3\right]\right] \tag{33}$$

$$y_{m+1} = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{3/4}\mathbf{S}\left[xy_m + \int_0^x xt\, y_m(t)dt\right]\right], \quad m = 0,1,2,\ldots \tag{34}$$

กำหนด $$R(x) = R_1(x) + R_2(x) = 1 + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{3/4}\mathbf{S}\left[-\frac{x^{1/4}}{\Gamma(5/4)} - x^2 - x - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3\right]\right]$$
$$= 1 + x - \frac{2x^{11/4}}{\Gamma(15/4)} - \frac{x^{7/4}}{\Gamma(11/4)} - \frac{8x^{19/4}}{\Gamma(23/4)} - \frac{3x^{15/4}}{\Gamma(19/4)}$$

ปรับความสัมพันธ์เวียนเกิดของ (33) และ (34) โดยกำหนด $R_1(x) = 1 + x$ จะได้

$$y_0 = 1 + x = R_1(x)$$

$$y_1 = -\frac{2x^{11/4}}{\Gamma(15/4)} - \frac{x^{7/4}}{\Gamma(11/4)} - \frac{8x^{19/4}}{\Gamma(23/4)} - \frac{3x^{15/4}}{\Gamma(19/4)} + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{3/4}\mathbf{S}\left[xy_0 + \int_0^x xt\, y_0(t)dt\right]\right]$$
$$= -\frac{2x^{11/4}}{\Gamma(15/4)} - \frac{x^{7/4}}{\Gamma(11/4)} - \frac{8x^{19/4}}{\Gamma(23/4)} - \frac{3x^{15/4}}{\Gamma(19/4)} + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{3/4}\mathbf{S}\left[x(1+x) + \int_0^x xt(1+t)dt\right]\right] = 0$$

$$y_2 = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{3/4}\mathbf{S}\left[xy_1 + \int_0^x xt\, y_1(t)dt\right]\right] = 0$$

$$y_3 = 0$$
$$\vdots$$

ดังนั้น ผลเฉลยคือ $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m = 1 + x$

ตัวอย่าง 2 แสดงการหาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโวลเทอราแบบไม่เชิงเส้น

$${}^cD_x^{1/3}y(x) = \frac{4}{5}x^{11/2}y(x) + \frac{3\pi}{4\Gamma(13/6)}x^{7/6} - x^7 + \int_0^x x^2t\left[y(t)\right]^2 dt \tag{35}$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0) = 0$ และมีผลเฉลยแม่นตรง $y(x) = x^{3/2}$

ทำการแปลงเซฮูทั้งสองข้างของสมการ (35) และแทนค่าเงื่อนไขค่าเริ่มต้นแล้วจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$V(s,u) = \left(\frac{u}{s}\right)^{1/3}\mathbf{S}\left[\frac{3\pi}{4\Gamma(13/6)}x^{7/6} - x^7\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{1/3}\mathbf{S}\left[\frac{4}{5}x^{11/2}y(x) + \int_0^x x^2t\left[y(t)\right]^2 dt\right] \tag{36}$$

แทน (9) ใน (36) จะได้

$$V(s,u) = \left(\frac{u}{s}\right)^{1/3} \mathbf{S}\left[\frac{3\pi}{4\Gamma(13/6)}x^{7/6} - x^{7}\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{1/3} \mathbf{S}\left[\frac{4}{5}x^{11/2}y(x) + \int_0^x x^2 t \sum_{m=0}^{\infty} A_m \, dt\right] \tag{37}$$

ทำการแปลงเซฮูผกผันทั้งสองข้างของ (37) และแทน (8) จะได้

$$\sum_{m=0}^{\infty} y_m = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{1/3} \mathbf{S}\left[\frac{3\pi}{4\Gamma(13/6)}x^{7/6} - x^{7}\right]\right] + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{1/3} \mathbf{S}\left[\frac{4}{5}x^{11/2}\sum_{m=0}^{\infty} y_m + \int_0^x x^2 t \sum_{m=0}^{\infty} A_m \, dt\right]\right] \tag{38}$$

เทียบทั้งสองข้างของ (38) จะได้ความสัมพันธ์

$$y_0 = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{1/3} \mathbf{S}\left[\frac{3\pi}{4\Gamma(13/6)}x^{7/6} - x^{7}\right]\right] \tag{39}$$

$$y_{m+1} = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{1/3} \mathbf{S}\left[\frac{4}{5}x^{11/2}y_m + \int_0^x x^2 t A_m \, dt\right]\right], \quad m = 0,1,2,\ldots \tag{40}$$

กำหนด

$$\begin{aligned} R(x) = R_1(x) + R_2(x) &= \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{1/3} \mathbf{S}\left[\frac{3\pi}{4\Gamma(13/6)}x^{7/6} - x^{7}\right]\right] \\ &= \mathbf{S}^{-1}\left[\frac{3\pi}{4}\left(\frac{u}{s}\right)^{5/2} - 5040\left(\frac{u}{s}\right)^{25/3}\right] = \frac{3\Gamma(1/2)}{4\Gamma(5/2)}x^{3/2} - \frac{5040}{\Gamma(25/3)}x^{22/3} \\ &= x^{3/2} - \frac{5040}{\Gamma(25/3)}x^{22/3} \end{aligned}$$

ปรับความสัมพันธ์ของ (39) และ (40) โดยกำหนด $R_1(x) = x^{3/2}$ จะได้

$$\begin{aligned} y_0 &= x^{3/2} = R_1(x) \\ y_1 &= -\frac{5040}{\Gamma(25/3)}x^{22/3} + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{1/3} \mathbf{S}\left[\frac{4}{5}x^{11/2}y_0 + \int_0^x x^2 t A_0 \, dt\right]\right] \\ &= -\frac{5040}{\Gamma(25/3)}x^{22/3} + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{1/3} \mathbf{S}\left[\frac{4}{5}x^{11/2}(x^{3/2}) + \int_0^x x^2 t (t^{3/2})^2 \, dt\right]\right] = 0 \end{aligned}$$

$$y_2 = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{1/3} \mathbf{S}\left[\frac{4}{5}x^{11/2}y_1 + \int_0^x x^2 t\, A_1 dt\right]\right] = 0$$

$$y_3 = 0$$

$$\vdots$$

ดังนั้น ผลเฉลยคือ $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m = x^{3/2}$

ตัวอย่าง 3 แสดงการหาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโวลเทอราแบบไม่เชิงเส้นที่มีผลต่างเคอร์แนล

$$ {}^{c}D_x^{6/5} y(x) = \frac{5}{2\Gamma(4/5)} x^{4/5} - \frac{x^9}{252} + \int_0^x (x-t)^2 \left[y(t)\right]^3 dt \tag{41}$$

สำหรับ $0 \le t < 1$ และมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ $y(0) = y'(0) = 0$
ทำการแปลงเชฮูทั้งสองข้างของสมการ (41)

$$\mathbf{S}\left[{}^{c}D_x^{6/5} y(x)\right] = \mathbf{S}\left[\frac{5}{2\Gamma(4/5)} x^{4/5} - \frac{x^9}{252}\right] + \mathbf{S}\left[\int_0^x (x-t)^2 \left[y(t)\right]^3 dt\right] \tag{42}$$

ใช้สมบัติการแปลงเชฮูใน (42) และแทนค่าเงื่อนไขค่าเริ่มต้น แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$V(s,u) = \left(\frac{u}{s}\right)^{6/5} \mathbf{S}\left[\frac{5}{2\Gamma(4/5)} x^{4/5} - \frac{x^9}{252}\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{6/5} \mathbf{S}\left[\int_0^x (x-t)^2 \left[y(t)\right]^3 dt\right] \tag{43}$$

แทน (9) ใน (43) และใช้ทฤษฎีสังวัตนาการ (4) จะได้

$$V(s,u) = \left(\frac{u}{s}\right)^{6/5} \mathbf{S}\left[\frac{5}{2\Gamma(4/5)} x^{4/5} - \frac{x^9}{252}\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^{6/5} \mathbf{S}\left[x^2\right] \cdot \mathbf{S}\left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m\right] \tag{44}$$

ทำการแปลงเชฮูผกผันทั้งสองข้างของ (44) และแทน (8) จะได้

$$\sum_{m=0}^{\infty} y_m = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{6/5} \mathbf{S}\left[\frac{5}{2\Gamma(4/5)} x^{4/5} - \frac{x^9}{252}\right]\right] + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{6/5} \mathbf{S}\left[x^2\right] \cdot \mathbf{S}\left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m\right]\right] \tag{45}$$

เทียบทั้งสองข้างของ (45) จะได้ความสัมพันธ์

$$y_0 = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{6/5}\mathbf{S}\left[\frac{5}{2\Gamma(4/5)}x^{4/5} - \frac{x^9}{252}\right]\right] = x^2 - \frac{1440}{\Gamma(56/5)}x^{51/5} \quad (46)$$

$$y_{m+1} = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{6/5}\mathbf{S}\left[x^2\right]\cdot\mathbf{S}\left[A_m\right]\right], \quad m = 0,1,2,\ldots \quad (47)$$

โดยการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียนจาก (46) และ (47) จะได้

$$y_0 = x^2 = R_1(x)$$

$$y_1 = -\frac{1440}{\Gamma(56/5)}x^{51/5} + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{6/5}\mathbf{S}\left[x^2\right]\cdot\mathbf{S}\left[A_0\right]\right]$$

$$= -\frac{1440}{\Gamma(56/5)}x^{51/5} + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{6/5}\mathbf{S}\left[x^2\right]\cdot\mathbf{S}\left[x^6\right]\right]$$

$$= -\frac{1440}{\Gamma(56/5)}x^{51/5} + \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{6/5}\cdot 2\left(\frac{u}{s}\right)^{3}\cdot 720\left(\frac{u}{s}\right)^{7}\right] = -\frac{1440}{\Gamma(56/5)}x^{51/5} + 1440\mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{56/5}\right] = 0$$

$$y_2 = \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{6/5}\mathbf{S}\left[x^2\right]\cdot\mathbf{S}\left[A_1\right]\right] = 0$$

$$y_3 = 0$$

$$\vdots$$

ดังนั้น ผลเฉลยคือ $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m = x^2$

ตัวอย่าง 4 แสดงการหาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโวลเทอรา-เฟรดฮอล์มแบบไม่เชิงเส้น

$${}^{c}D_x^{1/2}y(x) = -\frac{x^2e^x}{3}y(x) + \frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2)} - \frac{x^2}{3} + \int_0^x e^x t\, y(t)dt + \int_0^1 x^2\left[y(t)\right]^2 dt \quad (48)$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ $y(0) = 0$ และมีผลเฉลยแม่นตรง $y(x) = x$

ทำการแปลงเซฮู (48) และแทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้น จะได้

$$\left(\frac{s}{u}\right)^{1/2}V(s,u) = \mathbf{S}\left[\frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2)} - \frac{x^2}{3}\right] + \mathbf{S}\left[-\frac{x^2e^x}{3}y(x) + \int_0^x e^x t\, y(t)dt + \int_0^1 x^2\left[y(t)\right]^2 dt\right] \quad (49)$$

แทน (20) ใน (49) แล้วจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$V(s,u)=\left(\frac{u}{s}\right)^{1/2}\mathbf{S}\left[\frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2)}-\frac{x^2}{3}\right]+\left(\frac{u}{s}\right)^{1/2}\mathbf{S}\left[-\frac{x^2e^x}{3}y(x)+\int_0^x e^x t\,y(t)dt+\int_0^1 x^2\sum_{m=0}^{\infty}B_m dt\right] \tag{50}$$

ทำการแปลงเชฮูผกผันทั้งสองข้างของ (50) และแทน (19) จะได้

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}y_m &= \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{1/2}\mathbf{S}\left[\frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2)}-\frac{x^2}{3}\right]\right]\\ &+\mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{1/2}\mathbf{S}\left[-\frac{x^2e^x}{3}\sum_{m=0}^{\infty}y_m+\int_0^x e^x t\sum_{m=0}^{\infty}y_m(t)dt+\int_0^1 x^2\sum_{m=0}^{\infty}B_m dt\right]\right]\end{aligned} \tag{51}$$

เทียบทั้งสองข้างของ (51) จะได้ความสัมพันธ์

$$y_0=\mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{1/2}\mathbf{S}\left[\frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2)}-\frac{x^2}{3}\right]\right] = x-\frac{2x^{5/2}}{3\Gamma(7/2)} \tag{52}$$

$$y_{m+1}=\mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{1/2}\mathbf{S}\left[-\frac{x^2e^x}{3}y_m+\int_0^x e^x t\,y_m(t)dt+\int_0^1 x^2B_m dt\right]\right],\quad m=0,1,2,\ldots \tag{53}$$

โดยการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียนจาก (52) และ (53) จะได้

$$\begin{aligned}y_0 &= x = R_1(x)\\ y_1 &= -\frac{2x^{5/2}}{3\Gamma(7/2)}+\mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{1/2}\mathbf{S}\left[-\frac{x^2e^x}{3}y_0+\int_0^x e^x t\,y_0(t)dt+\int_0^1 x^2B_0 dt\right]\right]\\ &= -\frac{2x^{5/2}}{3\Gamma(7/2)}+\mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{1/2}\mathbf{S}\left[-\frac{x^3e^x}{3}+\int_0^x e^x t^2dt+\int_0^1 x^2t^2dt\right]\right]=0\\ y_2 &= \mathbf{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^{1/2}\mathbf{S}\left[-\frac{x^2e^x}{3}y_1+\int_0^x e^x t\,y_1(t)dt+\int_0^1 x^2B_1 dt\right]\right]=0\\ y_3 &= 0\\ &\vdots\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยคือ $y(x)=\sum_{m=0}^{\infty} y_m = x$

วิจารณ์ผลการวิจัย

จากผลการวิจัยพบว่า การแปลงเซฮูและวิธีการแยกอโดเมียนสามารถนำมาใช่ร่วมกันเพื่อหาผลเฉลยแบบประมาณค่าของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่มีอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตได้อย่างมีประสิทธิภาพ เนื่องจากผลเฉลยที่ได้ของตัวอย่างที่นำมาศึกษาเป็นผลเฉลยแม่นตรงดังแสดงในตัวอย่าง 2 ตัวอย่าง 3 (Yang & Hou, 2013) และตัวอย่าง 4 นอกจากนี้ยังพบว่าวิธีที่พัฒนาขึ้นมีประสิทธิภาพในการลู่เข้ามากกว่าวิธี Legendre Wavelets เมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยของ Rawashde ในปี 2011 เนื่องจากผลเฉลยที่ได้จากตัวอย่าง 1 ในงานวิจัยนี้เป็นผลเฉลยแม่นตรง (Rawashde, 2011) สำหรับการพิจารณาประสิทธิภาพในแต่ละขั้นตอนของวิธีการหาผลเฉลยที่ได้พัฒนาขึ้นมานั้น พบว่าการแปลงเซฮูสามารถนำมาใช้เพื่อกำจัดอนุพันธ์เชิงเศษส่วนและลดความซับซ้อนของสมการ ทำให้กำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิดที่ใช้ในการหาผลเฉลยได้โดยง่าย แต่สำหรับขั้นตอนการหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกอโดเมียนยังพบข้อจำกัดบางประการ เช่นในกรณีที่ผลเฉลยเริ่มต้น y_0 มีผลรวมของฟังก์ชันจำนวนหลายพจน์จะส่งผลให้การหาผลเฉลยมีความยุ่งยาก ถึงแม้ว่าเราจะใช้แนวคิดการปรับปรุงวิธีการแยกอโดเมียนเพื่อช่วยลดความซับซ้อนดังกล่าว แต่ยังไม่มีวิธีกำหนด $R_1(x)$ เพื่อปรับความสัมพันธ์ของ y_m ที่แน่นอน โดยหากกำหนด $R_1(x)$ ไม่เหมาะสมอาจส่งผลต่อประสิทธิภาพการลู่เข้าของผลเฉลยแบบประมาณค่าได้ แต่อย่างไรก็ตามผู้วิจัยคาดว่าแนวคิดที่ได้พัฒนาขึ้นมาในครั้งนี้จะสามารถนำไปพัฒนาและประยุกต์ใช้ในการคำนวณทางคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขและนำไปประมาณค่าผลเฉลยที่ต้องการได้

สรุปผลการวิจัย

การแปลงเซฮูและวิธีการแยกอโดเมียนสามารถนำมาใช้ร่วมกันเพื่อหาผลเฉลยแบบประมาณค่าของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโวลเทอรา และสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโวลเทอรา-เฟรดฮอล์มแบบไม่เชิงเส้นที่มีอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยผลที่ได้จากงานวิจัยนี้สามารถนำไปเป็นแนวทางในการพัฒนาวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เชิงเศษส่วนซึ่งเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญในศาสตร์ที่เกี่ยวข้องต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลตะวันออก และภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ที่สนับสนุนการทำวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

Belgacem, R., Baleanu, D., & Bokhari, A. (2019). Shehu transform and applications to Caputo-fractional differential equations. *International Journal of Analysis and Applications, 17*(6), 917-927. DOI:10.28924/2291-8639-17-2019-917

Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose *Q* is almost frequency in dependent-II, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 13*, 529-539.

Das, P., Rana S., & Ramos, H. (2019). Homotopy perturbation method for solving Caputo-type fractional-order Volterra-Fredholm integro-differential equations. *Computational and Mathematical Methods, 1*(5), 1-9. DOI:10.1002/cmm4.1047

Duan, J.-S., Rach, R., Baleanu, D., & Wazwaz, A.-M. (2012). A review of Adomian decomposition method and its applications to fractional di®erential equations. *Commun. Frac. Calc., 3*(2), 73-99.

Hamoud, A. A., & Ghadle, K. P. (2018). Modifed Laplace decomposition method for fractional Volterra-Fredholm integro-diferential equations. *Journal of Mathematical Modeling, 6*(1), 91-104.

Hamoud, A. A., Abdo M. S., & Ghadle K. P. (2018). Existence and uniqueness results for Caputo fractional integro-differential equation. *J. Ksiam, 12*(3), 163-177.

Hamoud, A. A., Ghadle K. P., Issa M.Sh. B., & Giniswamy. (2018). Existence and uniqueness theorems for fractional Volterra-Fredholm integro-differential equations. *International Journal of Applied Mathematics, 31*(3), 333-348.

Khan. H., Farooq, U., Shah, R., Baleanu. D., Kumam, P., & Arif M. (2020). Analytical Solutions of (2+Time Fractional Order) Dimensional Physical Models, Using Modified Decomposition Method. *Appl. Sci, 10*(122), 1-20. DOI:10.3390/app10010122

Maitama, S., & Zhao, W. (2019). New homotopy analysis transform method for solving multidimensional fractional diffusion equations. *Arab Journal of Basic and Applied Sciences, 27*(1), 27-44. DOI: 10.1080/25765299.2019.1706234

Maitama, S., & Zhao, W. (2019). New integral transform: Shehu transform a generalization of Sumudu and Laplace transform for solving differential equations. *International Journal of Analysis and Applications, 7*(2), 167-190. DOI:10.28924/2291-8639-17-2019-167

Noor, M. A. (2010). Iterative Methods for Nonlinear Equations Using Homotopy Perturbation Technique. *Applied Mathematics & Information Sciences, 4*(2), 227-235.

Qureshi, S., & Kumar P. (2019). Using Shehu integral transform to solve fractional order Caputo type initial value problems. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics, 18*(2), 75-83. DOI:10.17512/jamcm.2019.2.07

Rawashdeh, E.A. (2011). Legendre Wavelets Method for Fractional Integro-Differential Equations. *Applied Mathematical Sciences, 5*, 2467-2474.

Wazwaz, A.-M. (1999). A reliable modification of Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation, 102*, 77-86.

Yang, C., & Hou, J. (2013). Numerical solution of integro-differential equations of fractional order by Laplace decomposition method. *Wseas Transactions on Mathematics, 12*(12), 1173-1183.