รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปรากฏการณ์ แพลงก์ตอนพืชบลูมสำหรับชายหาดวอนนภา

A Phytoplankton Bloom Model for Wonnapa Beach

โดย

นายบุญยงค์ ศรีพลแผ้ว

นายสมคิด อินเทพ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

โครงการวิจัยประเภทงบประมาณเงินรายได้ส่วนงาน

ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. ๒๕๖๒

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

รหัสโครงการ...............................

สัญญาเลขที่ sc11/2562

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปรากฏการณ์ แพลงก์ตอนพืชบลูมสำหรับชายหาดวอนนภา

A phytoplankton bloom model for Wonnapa Beach

โดย

นายบุญยงค์ ศรีพลแผ้ว

นายสมคิด อินเทพ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้ส่วนงาน ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2562 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา เลขที่สัญญา sc11/2562

นายบุญยงค์ ศรีพลแผ้ว
นายสมคิด อินเทพ
ผู้วิจัย

บทคัดย่อ

ชื่อโครงการ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปรากฏการณ์ แพลงก์ตอนพืชบลูมสำหรับชายหาดวอนนภา

ชื่อผู้วิจัย นายบุญยงค์ ศรีพลแผ้ว และนายสมคิด อินเทพ

ในรายงานนี้ เราทำการศึกษาพลวัตของการเกิดแพลงก์ตอนพืชและปริมาณสารอาหารเมื่อเทียบกับเวลา โดยดัดแปลงจากแบบจำลองผู้ล่า-ผู้ถูกล่า เพื่อให้แบบจำลองสอดคล้องกับข้อมูลใน 2 ช่วงเวลา เราแบ่งการวิเคราะห์พลวัตออกเป็น 2 รูปแบบตามอัตราการเพิ่มขึ้นของปริมาณสารอาหาร

Abstract

Project Title: A Phytoplankton Bloom Model for Wonnapa Beach

Investigators: Boonyong Sriponpeaw and Somkid Intep

In this report, we study the dynamic of phytoplankton and nutrients with respect to time which is modified from the classical prey-predator model. In order to generate the model that satisfy the data in two time periods, we divide the dynamical analysis into two cases relied on nutrient input rates.

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและสรุปความเป็นมาของโครงการฯ

ในการศึกษาระบบนิเวศทางทะเล แพลงก์ตอนพืชจะเป็นสิ่งมีชีวิต ที่มีบทบาทสำคัญอย่างมาก เพราะนอกจากจะเป็นแหล่งอาหารหลัก ของห่วงโซ่อาหารแล้ว ยังเป็นตัวเพิ่มปริมาณออกซิเจนในท้องทะเลอีก แต่หากว่าการมีปริมาณมากเกินไปของแพลงก์ตอนพืชที่เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว กลับจะส่งผลเสียอย่างรุนแรงต่อระบบนิเวศ อาทิเช่น ทำให้ปริมาณออกซิเจนในระบบลดลง เนื่องจากความหนาแน่นที่มากจนเกินไปและทำให้สัตว์น้ำบางกลุ่มตาย เพราะขาดปริมาณออกซิเจน อีกทั้งส่งผลกระทบในทางทัศนียภาพ เพราะทำให้น้ำในชายหาดดูสกปรกและมีกลิ่นเหม็นจากการหมักหมม หนึ่งในปัจจัยหลักที่เป็นสาเหตุใหญ่ให้พิจารณา คือ ปริมาณความเข้มข้นของสารอาหาร ที่เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วโดยเฉพาะค่าไนเตรตและฟอสเฟต ซึ่งการเพิ่มขึ้นของสารอาหารอย่างรวดเร็วนี้ส่วนหนึ่งเกิดจาก มนุษย์ เช่น การปล่อยปริมาณน้ำเสียที่ไม่ได้รับการบำบัดจากแหล่งชุมชน ร้านอาหาร หรือแหล่งอุตสาหกรรม ซึ่งตามสถิติในช่วง 2-3 ปีที่ผ่านมา มีปรากฏการณ์น้ำเปลี่ยนสีอย่างรุนแรง ตามชายฝั่งชลบุรี เช่น บางแสน หาดวอนนภา เกาะสีชัง ซึ่งในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยมีความประสงค์ ที่จะศึกษาพฤติกรรมทางพลวัต (dynamical behavior) ของปริมาณประชากรของแพลงก์ตอน กับ ความเข้มข้นของสารอาหารที่เกิดขึ้นตามชายฝั่ง ในบริเวณหาดวอนนภา ในช่วงระยะเวลาที่เกิด แพลงก์ตอนบลูม และหาจุดเสถียรภาพของปริมาณสารอาหารและปริมาณแพลงก์ตอน ที่เกิดในช่วงฤดูกาลและทำการคำนวณ ระดับขีดเริ่มเปลี่ยน(threshold) ของปริมาณสารอาหารที่กระตุ้นให้เกิดแพลงก์ตอนบลูม จะได้ควบคุมปริมาณสารอาหารได้อย่างเหมาะสม และทำนายเพื่อยับยั้ง ไม่ให้เกิดปรากฏการณ์ แพลงก์ตอนบลูม

1.2 **วัตถุประสงค์ของการวิจัย**

เพื่อหาจุดเสถียรภาพของปริมาณสารอาหารและปริมาณแพลงก์ตอน ที่เกิดในช่วงฤดูกาลในบริเวณหาดวอนนภา และทำการคำนวณ ระดับขีดเริ่มเปลี่ยน(threshold) ของปริมาณสารอาหารที่กระตุ้นให้เกิดแพลงก์ตอนบลูม จะได้ควบคุมปริมาณสารอาหารได้อย่างเหมาะสม และทำนายเพื่อยับยั้ง ไม่ให้เกิดปรากฏการณ์ แพลงก์ตอนบลูม

1.3 **ขอบเขตของการวิจัย**

เราทำการรวบรวมข้อมูลทางสถิติของจำนวนประชากรของแพลงก์ตอนเปรียบเทียบกับปริมาณสารอาหารในช่วงเวลาที่เกิดแพลงก์ตอนบลุม และ ทำการตั้งระบบสมการเชิงอนุพันธ์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์ของปริมาณสารอาหารและจำนวนประชากรของแพลงก์ตอนพืช โดยที่พิจารณารูปแบบการเพิ่มปริมาณสารอาหารในกรณีต่าง ๆ โดยเริ่มจากกรณีที่ปริมาณสารอาหารที่เพิ่มขึ้นเข้ามามีค่าคงที่ และกรณีที่ปริมาณสารอาหารมีค่าเป็นฟังก์ชัน ที่ขึ้นอยู่กับเวลา และนำผลที่ได้มาคำนวณโดยใช้โปรแกรมคำนวณทางคณิตศาสตร์ อาทิ Math lab หรือ Mathematica เพื่อนำค่าผลลัพธ์ที่ได้ทางทฤษฎีไปอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นตามข้อมูลจริง

บทที่ 2

วิธีการดำเนินการวิจัย

ในการศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยมีวิธีการดำเนินการวิจัย ดังนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> ทำการรวบรวมข้อมูลเชิงสถิติของปริมาณสารอาหารและปริมาณแพลงก์ตอนในช่วงที่เกิดปรากฏการณ์แพลงตอนบลูมในหาดวอนนภา

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> ตั้งสมการเชิงอนุพันธ์ และ แก้ระบบสมการดังกล่าว โดยใช้ เทคนิคทางคณิตศาสตร์เชิงพลวัต

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> หาจุดเสถียรภาพของปริมาณสารอาหารและปริมาณแพลงก์ตอน ที่เกิดในช่วงฤดูกาลในบริเวณหาดวอนนภา

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> คำนวณระดับขีดเริ่มเปลี่ยน(threshold) ของปริมาณสารอาหารที่กระตุ้นให้เกิดแพลงก์ตอนบลูม

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> นำผลที่ได้มาคำนวณโดยใช้โปรแกรมคำนวณทางคณิตศาสตร์ อาทิ Math lab หรือ Mathematica เพื่อนำค่าผลลัพธ์ที่ได้ทางทฤษฎีไปอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นตามข้อมูลจริง ในรูปแบบ dynamics

บทที่ 3

ผลการวิจัย

บทนำ

แพลงก์ตอนพืชเป็นองค์ประกอบที่มีบทบาทสำคัญสำหรับสิ่งมีชีวิตในท้องทะเลในฐานะเป็นแหล่งอาหารหลักของห่วงโซ่อาหารทางทะเล แต่อย่างไรก็ตามแพลงก์ตอนพืชก็สามารถมองเป็นสิ่งที่อันตรายร้ายแรงต่อสิ่งมีชีวิตในท้องทะเลถ้าจำนวนประชากรมีมากจนเกินไป ยกตัวอย่างเช่น Cyanobacteria สามารถเกาะกลุ่มกันอย่างหนาแน่นจนทำให้เกิดผลกระทบเชิงลบต่อสิ่งมีชีวิตโดยการลดระดับปริมาณออกซิเจนในน้ำอย่างรวดเร็ว และเพิ่มปริมาณของเสียซึ่งจะลดระดับคุณภาพของน้ำทำให้เกิดสภาวะน้ำเป็นพิษและมลพิษต่อระบบนิเวศ

ในช่วงหลายปีนี้ การศึกษาพลวัตของการเพิ่มขึ้นของแพลงก์ตอนพืชเป็นที่น่าสนใจต่อนักคณิตศาสตร์ทางนิเวศวิทยา โดยเริ่มสนใจต่อปัจจัยที่เป็นผลกระทบต่อพลวัตการเพิ่มขึ้นของปริมาณแพลงก์ตอน เช่น ปริมาณสารอาหาร แสงสว่าง อุณหภูมิ ปริมาณแพลงก์ตอนสัตว์

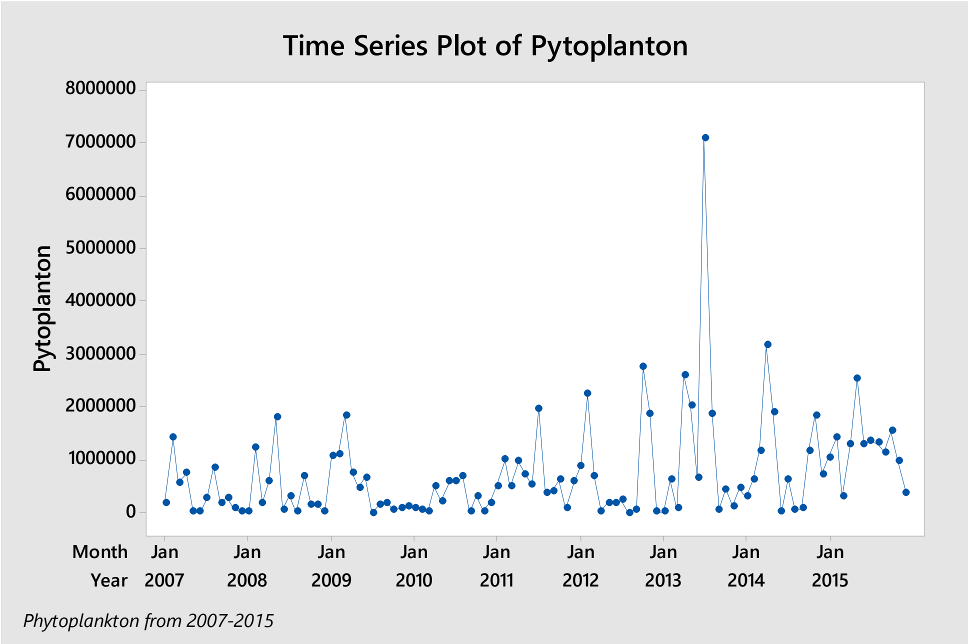
ใน [1] Smith ได้ทำการวิเคราะห์ปริมาณอัตราส่วนของไนโตรเจนและฟอสเฟตต่อปริมาณแพลงก์ตอนพืช ต่อมา Huppert [2] ได้ดัดแปลงแบบจำลองแบบผู้ล่าและผู้ถูกล่ามาวิเคราะห์ข้อมูลของพลวัตการเพิ่มขึ้นของปริมาณแพลงก์ตอนพืชกับปริมาณสารอาหาร

ในงานวิจัยนี้ เราจะทำการวิเคราะห์พลวัตของปริมาณการเกิดแพลงก์ตอนพืชในบริเวณหาดวอนนภา โดยดัดแปลงแบบจำลองแบบผู้ล่าและผู้ถูกล่าโดยคิดเป็น 2 ช่วงระยะเวลา

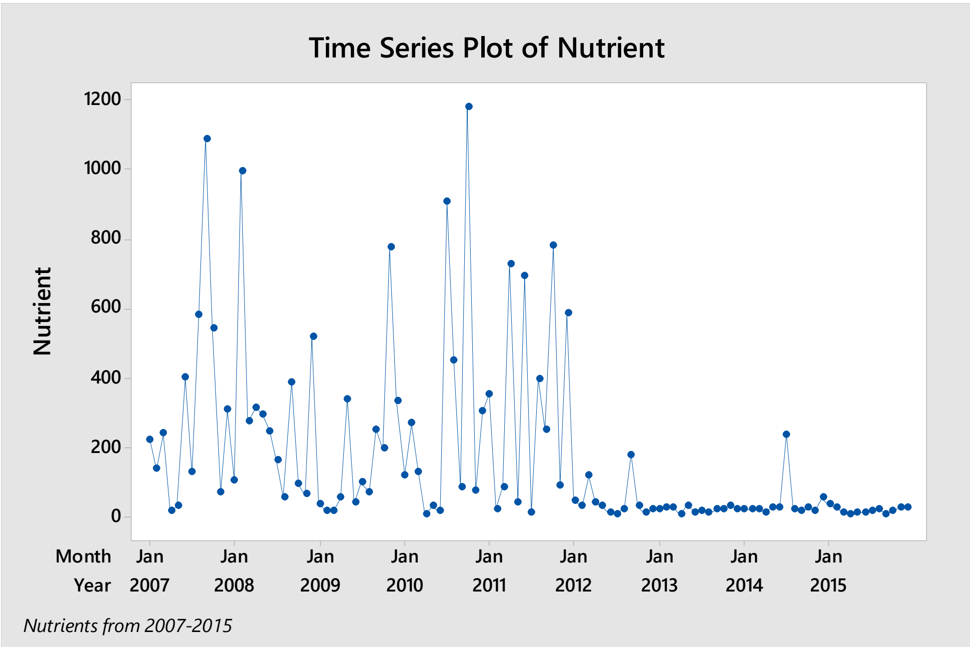
การสำรวจข้อมูลจากพื้นที่จริง

เราทำการสำรวจข้อมูลจำนวนประชากรของแพลงก์ตอนพืช Noctiluca ซึ่งเป็นสายพันธุ์ที่มีความหนาแน่นมากที่สุดในบริเวณหาดวอนนภาจากบ่อบำบัดน้ำเสียในปี พ.ศ. 2550-2558 โดยได้ข้อมูลจากสถาบันวิทยาศาสตร์ทางทะเล มหาวิทยาลัยบูรพา จังหวัดชลบุรี ในรูปภาพที่ 1 แสดงให้เห็นถึงกราฟอนุกรมเวลาของปริมาณมวลชีวภาพของแพลงก์ตอนพืชเมื่อเทียบกับเวลา และในรูปภาพที่ 2 แสดงถึงกราฟอนุกรมเวลาของปริมาณเข้มข้นของปริมาณสารอาหาร (ไนโตรเจนและฟอสเฟต)เมื่อเทียบกับเวลา

เราสามารถสังเกตได้จากกราฟว่าในช่วงปี พ.ศ. 2550-2554 ปริมาณสารอาหารมีการกวัดแกว่งอย่างมากคล้ายกับฟังก์ชันคาบ และในปี พ.ศ. 2555-2558 ปริมาณสารอาหารมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมากแทบจะมีอัตราคงที่ ซึ่งเราจะนำข้อมูลนี้มาเป็นตัวชี้นำในการสร้างแบบจำลองในการพิจารณาปริมาณของสารอาหารที่มีผลต่อพลวัตของแพลงก์ตอนพืช



รูปภาพที่ 1 จำนวนแพลงก์ตอนพืชในบริเวณบ่อบำบัดหาดวอนนภาในช่วงปี พ.ศ. 2550-2558



รูปภาพที่ 2 จำนวนปริมาณสารอาหาร (ไนโตรเจนและฟอสเฟต)ในบริเวณบ่อบำบัดหาดวอนนภาในช่วงปี พ.ศ. 2550-2558

ผลการวิจัย

ให้ N แทนปริมาณความเข้มข้นของสารอาหาร และ P แทนปริมาณมวลชีวภาพของแพลงก์ตอนพืช เราสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ของแบบจำลองแพลงก์ตอนพืชและปริมาณสารอาหารได้ในรูป

$$\frac{dN}{dt} = \mu(\mathrm{t})I - aNP - bN \tag{1}$$

$$\frac{dP}{dt} = cNP - dP \tag{2}$$

โดยที่ สมการ (1) แสดงถึงสมการอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณสารอาหาร N เมื่อเทียบกับเวลา

โดย $\mu(t)I$ แสดงถึงอัตราการเพิ่มขึ้นของปริมาณสารอาหารจากแหล่งภายนอก

aNP เป็นอัตราการลดลงของปริมาณสารอาหารจากการใช้สารอาหารของแพลงก์ตอนพืช

และ bN แสดงถึงอัตราการลดลงของปริมาณสารอาหารจากปรากฏการณ์ต่าง ๆ เช่น จม หรือ หายไปจากการบำบัดน้ำ

และ สมการ (2) แสดงถึงสมการอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณแพลงก์ตอนพืช P

โดย cNP เป็นอัตราการเพิ่มขึ้นโดยคิดจากปริมาณสารอาหารที่ได้รับ

และ dP เป็นอัตราการตายหรือจมของแพลงก์ตอนพืช

จากการสำรวจข้อมูลจากพื้นที่จริง เราจะพิจารณาพลวัตใน 2 รูปแบบ โดยพิจารณอัตราการเพิ่มขึ้นของปริมาณสารอาหารในรูปแบบของฟังก์ชันคาบ เพื่ออธิบายข้อมูลในปี พ.ศ. 2550-2554 และพิจารณาการเพิ่มขึ้นของปริมาณสารอาหารในรูปแบบฟังก์ชันคงที่ เพื่ออธิบายข้อมูลในปี พ.ศ. 2555-2558

3.1 การเพิ่มขึ้นของปริมาณสารอาหารในรูปแบบฟังก์ชันคาบ

สมมติ $\mu(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบที่มีคาบเป็น ω โดยที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และโดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้แอมพลิจูดมีค่าเป็น 1

พิจารณาที่ $P = 0$ จะได้

$$\frac{dN}{dt} + bN = \mu(\mathrm{t})I \tag{3}$$

พิจารณาผลเฉลยเอกพันธ์ของสมการ (3)

$$\frac{dN}{dt} + bN = 0$$

$$e^{bt}\frac{dN}{dt} + bNe^{bt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(Ne^{bt}\right) = 0$$

ดังนั้น ผลเฉลยเอกพันธ์ คือ $N_h(t) = Ae^{-bt}$

พิจารณาผลเฉลยเฉพาะของสมการ (3) เนื่องจาก $\mu(\mathrm{t})$ เป็นฟังก์ชันคาบ ดังนั้นสมการ (3) จะมีผลเฉลยเฉพาะ $\bar{N}(t)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันคาบ ดังนี้

$$\frac{d\bar{N}}{dt}+b\bar{N}=\mu(t)I$$

โดยการใช้ตัวประกอบเพื่อการอินทิเกรต $e^{\int bdt}=e^{bt}$ จะได้

$$e^{bt}\frac{d\bar{N}}{dt}+b\bar{N}e^{bt}=\mu(t)Ie^{bt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{N}e^{bt}\right)=\mu(t)Ie^{bt}$$

$$\int_{t}^{t+\omega} d\left(\bar{N}e^{bs}\right)=\int_{t}^{t+\omega}\mu(s)Ie^{bs}ds$$

$$e^{b(t+\omega)}\bar{N}(t)-e^{bt}\bar{N}(t)=\int_{t}^{t+\omega}\mu(\mathrm{s})Ie^{bs}ds$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะ คือ $\bar{N}(t)=\dfrac{e^{-bt}}{e^{b\omega}-1}\displaystyle\int_{t}^{t+\omega}\mu(\mathrm{s})Ie^{bs}ds$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธ์ (3) คือ

$$N(t)=N_h(t)+\bar{N}(t)=Ae^{-bt}+\bar{N}(t)$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้น จะได้ $A=N(0)-\bar{N}(0)$

นั่นคือ $N(t)=\bar{N}(t)+\left(N(0)-\bar{N}(0)\right)e^{-bt}$

ดังนั้น $N(t)\to\bar{N}(t)$ ขณะที่ $t\to\infty$

บทตั้ง ผลเฉลยของสมการ (3) มีค่าไม่ติดลบ และเมื่อเวลาใด ๆ ปริมาณผลรวมของสารอาหารและแพลงก์ตอนพืชมีขอบเขตจำกัด

พิสูจน์ ให้ $s=N+P$ และสมมติ $L=\min\{b,d\}$

จากค่าแอมพลิจูดของ $\mu=1$ ดังนั้น $|\mu(t)|\le 1$

เนื่องจาก $\left.\dfrac{dN}{dt}\right|_{N=0}=\mu(\mathrm{t})I>0$ และ $\left.\dfrac{dP}{dt}\right|_{P=0}=0$

ดังนั้น ผลเฉลยของระบบมีค่าไม่ติดลบ เมื่อเวลา t ใด ๆ

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt}&\le\mu(\mathrm{t})I-bN-dP\\&\le I-Ls\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\limsup_{t\to\infty}\ (s(t))\le\frac{I}{L}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $N(t)+P(t)\le\dfrac{I}{L}$ เมื่อเวลา t มีค่ามาก

ดังนั้น ปริมาณผลรวมของสารอาหารและแพลงก์ตอนในระบบมีขอบเขตจำกัด

ทฤษฎีบท ถ้า $\psi = \int_0^{\omega}\left(c\bar{N}(t) - \mathrm{d}\right)dt < 0$ แล้วผลเฉลย $\left(N(t), P(t)\right)$ ของสมการ (3) จะสอดคล้อง

$\lim_{t\to\infty}\left(N(t) - \bar{N}(t)\right) = \lim_{t\to\infty} P(t) = 0$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\dfrac{dN}{dt} \le \mu(\mathrm{t})I - b\,\mathrm{N}$

ดังนั้น

$$N(t) \le \bar{N}(t) + \left(N(0) - \bar{N}(0)\right)e^{-bt}$$

สำหรับค่า $\varepsilon > 0$ ใด ๆ จะมีค่า t_0 ซึ่งทุก $t \ge t_0$

$$N(t) \le \bar{N}(t) + \varepsilon$$

เราสามารถเลือกค่า ε ที่เหมาะสมที่ทำให้

$$\int_0^{\omega}\left[c\left(\bar{N}(t) + \varepsilon\right) - d\right]dt < 0$$

จาก $dP \le P(cN - d)\,\mathrm{dt}$ สำหรับบางค่า $\mathrm{k} = \mathrm{k}(t) > 0$ จะได้

$$P(t) \le P(0)e^{\int_0^{t_0}[cN(r)-d]dr} e^{\int_{t_0}^{t_0+k\omega}\left[c\left(\bar{N}(r)+\varepsilon\right)-d\right]dr}$$

ดังนั้น $\lim_{t\to\infty} P(t) = 0$

จาก $\dfrac{d}{dt}\left(Ne^{bt}\right) = \left(\mu(t)I - aNP\right)e^{bt}$

จะได้ $N(t) = N(0)e^{-bt} + be^{-bt}\int_0^t \mu(r)Ie^{br}dr - ae^{-bt}\int_0^t N(r)P(r)e^{br}dr$

เนื่องจาก $\lim_{t\to\infty} P(t) = 0$ และ $N(t)$ มีขอบเขตจำกัด จะได้

$$\lim_{t\to\infty} ae^{-bt}\int_0^t N(r)P(r)e^{br}dr = 0$$

ดังนั้น $N(t) \to \bar{N}(t)$ ขณะที่ $t \to \infty$

ซึ่งทำให้สามารถสรุปได้ว่า ถ้า $\psi < 0$ จะอธิบายได้ว่า ปริมาณสารอาหารจะไม่เพียงพอที่ทำให้ประชากรของแพลงก์ตอนคงอยู่

แต่ถ้า $\psi > 0$ เนื่องจากเราสามารถเขียน

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dN}{dt} \\ \dfrac{dP}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & -a\bar{N} \\ 0 & c\bar{N} - d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N \\ P \end{bmatrix}$$

ให้ $\phi(t)$ เป็นเมทริกซ์ผลเฉลยของสมการข้างบน โดยการคำนวณอย่างง่ายจะได้ค่าลักษณะเฉพาะของ $\phi(\omega)$ คือ

$$e^{-b\omega} \quad \text{และ} \quad e^{\int_0^{\omega}(c\bar{N}-d)dt}$$

ซึ่งแสดงว่า $\left(\bar{N}(t), 0\right)$ เป็นจุดไม่เสถียร

ในกรณี $P \ne 0$ เราสามารถทำขั้นตอนการพิสูจน์คล้ายกับ Jang et al. [3] ว่า $\left(N(t), P(t)\right)$ มีความเสถียรและลู่เข้าสู่ $\left(\tilde{N}(t), \tilde{P}(t)\right)$

3.2 การเพิ่มขึ้นของปริมาณสารอาหารในรูปแบบฟังก์ชันค่าคงที่

โดยไม่เสียนัยทั่วไป เราสมมติให้ $\mu(t)=1$

จากสมการ

$$\frac{dN}{dt}=I-aNP-bN$$
$$\frac{dP}{dt}=cNP-dP \qquad (4)$$

เราพิจารณาหาจุดสมดุลโดย

$$I-aNP-bN=0$$
$$(cN-d)P=0$$

<u>**กรณีที่ 1**</u> $P=0$

จะได้ $I=aNP+bN=bN$

ดังนั้น $N=\frac{I}{b}$

และจุดสมดุล คือ $\left(N^*,P^*\right)=\left(\frac{I}{b},0\right)$

<u>**กรณีที่ 2**</u> $N=\frac{d}{c}$

จะได้ $I=(aP+b)\frac{d}{c}$

ดังนั้น $P=\frac{cI-bd}{ad}$

และจุดสมดุล คือ $\left(N^*,P^*\right)=\left(\frac{d}{c},\frac{cI-bd}{ad}\right)$

พิจารณาเมทริกซ์จาโคเบียน

$$J=\begin{bmatrix}-aP-b & -aN\\ cP & cN-d\end{bmatrix}$$

ที่จุด $\left(N^*,P^*\right)=\left(\frac{I}{b},0\right)$ จะได้

$$J=\begin{bmatrix}-b & -\frac{aI}{b}\\ 0 & \frac{cI}{b}-d\end{bmatrix}$$

โดยได้ค่าลักษณะเฉพาะ λ จาก

$$\begin{vmatrix}-b-\lambda & -\frac{aI}{b}\\ 0 & \frac{cI}{b}-d-\lambda\end{vmatrix}=0$$

จะได้ $\lambda=-b,\ \lambda=cI-d$

ดังนั้น ระบบไม่เสถียรภายใต้เงื่อนไข $cI>bd$

ที่จุด $\left(N^*, P^*\right)=\left(\frac{d}{c}, \frac{cI-bd}{ad}\right)$ จะได้

$$J=\begin{bmatrix} -\frac{cI}{d} & -\frac{ad}{c} \\ c\left(\frac{cI-bd}{ad}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

โดยมีค่าลักษณะเฉพาะเป็น

$$\lambda=\frac{-\frac{cI}{d}\pm\sqrt{\left(\frac{cI}{d}\right)^2-4(cI-db)}}{2}$$

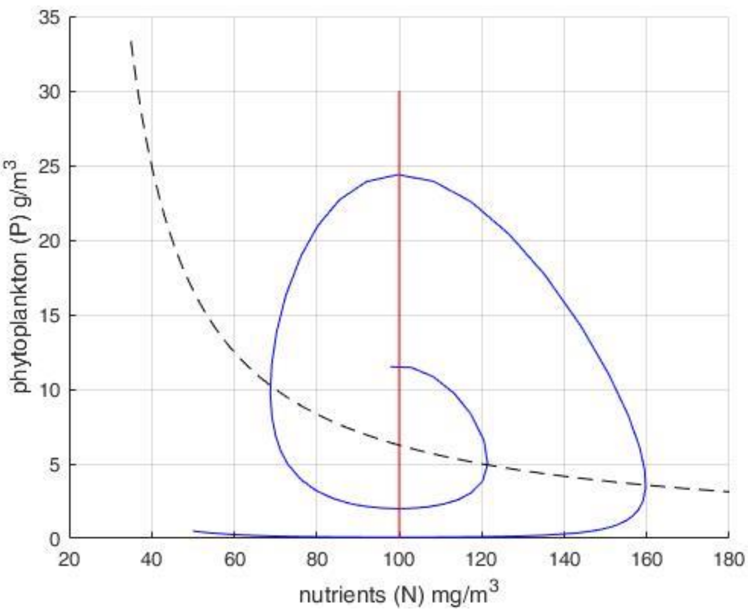
ถ้า $\left(\frac{cI}{d}\right)^2-4(cI-db)<0$ จะได้ $\operatorname{Re}(\lambda)=-\frac{cI}{d}<0$

ดังนั้น จุดสมดุลนี้เป็นจุดเสถียรภาพเฉพาะเชิงเส้นกำกับ

แต่ถ้า $\left(\frac{cI}{d}\right)^2-4(cI-db)\geq 0$ จะได้ $\sqrt{\left(\frac{cI}{d}\right)^2-4(cI-db)}<\frac{cI}{d}$ ทำให้ได้ว่า $\lambda<0$

ดังนั้น จุดสมดุลนี้เป็นจุดเสถียรภาพเฉพาะเชิงเส้นกำกับ

เราทำการจำลองกราฟจากสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังรูปภาพที่ 3 ในรูปแบบระนาบเฟส



รูปภาพที่ 3 เส้นโค้งเวียนก้นหอยแสดงรูปภาพระนาบเฟสของแพลงก์ตอนพืชและสารอาหารที่เกิดจากแบบจำลองในระบบสมการ (4) โดยใช้ค่าพารามิเตอร์ $I=0.00075,\ a=1,\ b=0.001,\ c=1,\ d=0.1$

จากรูปภาพที่ 3 เส้นตรงในแนวตั้ง คือ เส้นที่แสดงค่า $\frac{dP}{dt}=0$ และเส้นประแสดงค่า $\frac{dN}{dt}=0$ ซึ่งกราฟระนาบเฟสจะแสดงในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากวงนอกสู่วงใน โดยที่ปริมาณสารอาหารจะเพิ่มขึ้นจนถึง

จุดวิกฤติ $\left(\frac{dN}{dt}=0\right)$ ที่ปริมาณสารอาหารสูงสุด จากนั้นปริมาณสารอาหารก็ลดลงซึ่งในขณะเดียวกันปริมาณแพลงก์ตอนพืชก็เพิ่มขึ้นจนถึงจุดวิกฤติ $\left(\frac{dP}{dt}=0\right)$ ที่ปริมาณแพลงก์ตอนสูงสุด(แพลงก์ตอนบลูม)และจากนั้นปริมาณแพลงก์ตอนก็ลดลงจนกระทั่งถึงจุดวิกฤติ $\left(\frac{dN}{dt}=0\right)$ ที่ปริมาณอาหารต่ำสุดและมีการเพิ่มขึ้นของสารอาหารอีกครั้งเป็นการวนซ้ำไปเรื่อย ๆ

บทที่ 4
สรุปผลการวิจัย

จากการวิเคราะห์ค้นพบว่า ในช่วงที่ปริมาณสารอาหารมีอัตราการเพิ่มขึ้นในรูปแบบฟังก์ชันคาบนั้น แพลงก์ตอนมีอัตราการเปลี่ยนแปลงต่ำมาก ซึ่งอาจจะหายไปเลยหรือมีความเสถียรไม่เปลี่ยนแปลงไปเยอะมาก จะมีแต่กรณีที่ค่าคงที่ $\psi > 0$ เท่านั้น ที่เกิดความไม่เสถียร ส่วนรูปแบบที่มีอัตราการเพิ่มสารอาหารคงที่ จะสามารถอธิบายการเกิดแพลงก์ตอนบลูมได้อย่างมีขั้นตอน โดยเกิดการวนซ้ำกระบวนการสะสมสารอาหารจนถึงจุดวิกฤติและเกิดการลดลงของสารอาหารจนเกิดแพลงก์ตอนบลูมและลดลงจนถึงจุดที่เริ่มสะสมสารอาหารใหม่อีกครั้ง

บรรณานุกรม

[1] Smith, V. H. (1983). Low nitrogen to phosphorus ratios favor dominance by blue-green algae in lake phytoplankton. *Science. 221*(4611), 669-671.

[2] Huppert, A., Blasius, B. and Stone, L. (2002). A Model of Phytoplankton Blooms. *The American Naturalist. 159*, 156-171.

[3] Jang, S. R.-J., Baglama, J., & Seshaiyer, P. (2005). Intratrophic predation in a simple food chain with fluctuating nutrient. *Discrete & Continuous Dynamical Systems, 5*(2), 335-352.