บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

กระบวนการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์ โดยใช้วิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของระบบสมการ ใช้กฎของซิมป์สันในการแก้ปัญหาในส่วนที่เป็นปริพันธ์และปรับค่าเริ่มต้นที่ไม่ทราบให้สอดคล้องกับค่าขอบด้วยวิธีของบรอยเดนนั้น ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นตอนการปรับปัญหาของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์
2. ขั้นตอนการใช้กฎของซิมป์สันในการหาปริพันธ์
3. ขั้นตอนการใช้วิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น
4. ปัญหาของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์
5. การแก้ปัญหาสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์

ขั้นตอนการปรับปัญหาของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์

การปรับปัญหาของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์ในส่วนที่เป็นอนุพันธ์ให้เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและส่วนที่เป็นปริพันธ์ใช้กฎของซิมป์สัน จากปัญหาทั่วไป (1.1) และ (1.2) มีข้อสมมติเกี่ยวกับปัญหาดังต่อไปนี้

1) ฟังก์ชัน f เป็นแบบที่อนุพันธ์อันดับสูงสุดสามารถแยก $y^{(n)}(x)$ เป็นนิพจน์เดี่ยวได้ และฟังก์ชันที่อยู่ในสมการมีอนุพันธ์เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง นั่นคือ สมการอยู่ในรูปแบบ

$$f(x, \mathbf{Y}'(x)) = \phi(x, \mathbf{U}'(x)) - y^{(n)}(x)$$

เมื่อ $\mathbf{U}'(x) = (\mathbf{y}^{(n-1)}(x), \mathbf{y}^{(n-2)}(x), \ldots, \mathbf{y}'(x), \mathbf{y}(x))$, และ ϕ มีอนุพันธ์ย่อยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุดในโดเมน

2) ฟังก์ชัน K อยู่ในแบบที่ฟังก์ชันของ x ไม่สามารถแยกจากปริพันธ์ นั่นคือ ฟังก์ชันอยู่ในแบบ

$$v_i(x) = \int_a^x K(x, t, \mathbf{Y}'(t))dt$$

และ

$$u(x) = \int_a^b K(x, t, \mathbf{Y}'(t))dt$$

เมื่อ u และ v_i เป็นฟังก์ชันที่มีปริพันธ์เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุดทุกอันดับ

3) สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เงื่อนไขค่าเริ่มต้นหรือค่าขอบปัญหาที่เราพิจารณาอยู่ในรูปแบบ ดังนี้

สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบวอลแตร์รา

จากสมการเราสามารถเขียนรูปแบบได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} & y^{(n)}(x) = \phi(x, \mathbf{U}'(x)) + v_i(x) \\ \text{โดยที่} \quad & v_i(x) = \int_a^x K(x, t, \mathbf{Y}'(t))dt \end{aligned}\right\} \quad (3.1a)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{และเงื่อนไขค่าขอบ} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{Y}'(x_0), \mathbf{Y}'(x_1), \ldots, \mathbf{Y}'(x_k)) = \mathbf{0} \\ \text{โดยมีเงื่อนไข} \quad & v_i(a) = 0 \\ & i = 1, 2, 3, \ldots, k; x_0 = a, x_k = x \end{aligned}\right\} \quad (3.1b)$$

สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบเฟรดโฮล์ม

จากสมการเราสามารถเขียนรูปแบบได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} & y^{(n)}(x) = \phi(x, \mathbf{U}'(x)) + u(x) \\ \text{โดยที่} \quad & u(x) = \int_a^b K(x, t, \mathbf{Y}'(t))dt \end{aligned}\right\} \quad (3.2a)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{และเงื่อนไขค่าขอบ} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{Y}'(x_0), \mathbf{Y}'(x_1), \ldots, \mathbf{Y}'(x_k)) = \mathbf{0} \\ & x_0 = a, x_k = b \end{aligned}\right\} \quad (3.2b)$$

ขั้นตอนการใช้กฎของซิมป์สันในการหาปริพันธ์

จากสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์วอลแตร์ราส่วนที่เป็นปริพันธ์ คือ

$$v_i(x) = \int_a^x K(x, t, \mathbf{Y}'(t))dt$$

โดยมีเงื่อนไข $v_i(a) = 0$

ในการดัดแปลงกฎของซิมป์สันเพื่อให้เหมาะสมในการใช้งานวิจัยนี้ ในสูตร (2.8) ดังนี้ ขั้นตอนวิธีการหาค่า $\int_a^x K(x, t, \mathbf{Y}'(t))dt$ เมื่อ $a \le x \le b$, $a \le t \le b$ เป็นดังนี้

1. กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $v_i(a) = 0$ และ $t = a$
2. กำหนดค่า $k_1 = K(x_{i-1}, t_{i-1}, \mathbf{Y}'(t_{i-1}))$,

$k_2 = K(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, t_{i-1} + \frac{h_i}{2}, \mathbf{Y}'(t_{i-1} + \frac{h_i}{2}))$ และ $k_3 = K(x_i, t_i, \mathbf{Y}'(t_i))$

3. คำนวณค่าปริพันธ์ ให้ $K := \frac{[k_1 + 4k_2 + k_3]}{6}$

สำหรับ $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ให้ $t := t + h$ และ $A := A + K(x, t, \mathbf{Y}'(t))$

4. ให้ $A := Kh$

และเนื่องจากส่วนที่เป็นปริพันธ์แบบวอลแตร์รา เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องของ x บนช่วงปิด$[a, x]$ โดย x เป็นตัวไม่ทราบค่าและ a เป็นค่าคงที่ ค่าของปริพันธ์ยังคงเปลี่ยนแปลงไปตามค่า x จึงนำ

$K(x,t,\mathbf{Y}'(t))$ ดัดแปลงตามกฎของซิมป์สันให้สอดคล้องกับระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ เพื่อนำไปคำนวณค่าในระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ ดังสมการ (2.9)
และจากสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบเฟรดโฮล์มส่วนที่เป็นปริพันธ์ คือ

$$u(x) = \int_a^b K(x,t,\mathbf{Y}'(t))dt$$

ในการดัดแปลงกฎของซิมป์สันเพื่อให้เหมาะสมในการใช้งานวิจัยนี้ ในสูตร (2.8) ดังนี้
ขั้นตอนวิธีการหาค่า $\int_a^b K(x,t,\mathbf{Y}'(t))dt$ เมื่อ $a \le x \le b$, $a \le t \le b$ เป็นดังนี้

1. กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $u(x) = 0$ และ $t = a$
2. กำหนดค่า $k_1 = K(x,t_{i-1},\mathbf{Y}'(t_{i-1}))$, $k_2 = K(x,t_{i-1}+\frac{h_i}{2},\mathbf{Y}'(t_{i-1}+\frac{h_i}{2}))$ และ $k_3 = K(x,t_i,\mathbf{Y}'(t_i))$
3. คำนวณค่าปริพันธ์ ให้ $K := \frac{[k_1+4k_2+k_3]}{6}$

สำหรับ $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ ให้ $t := t+h$ และ $A := A + K(x,t,\mathbf{Y}'(t))$

4. ให้ $A := Kh$

ขั้นตอนการใช้วิธีของรุงเง-คุตตาในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

ในการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (3.1a) และ (3.2a) โดยใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่ ตัวแปร $\mathbf{U}'(x)$ แทน $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ ถ้า $u = y^{(n)}$ จะได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งจำนวน n สมการ และปรับเงื่อนไขค่าขอบให้สอดคล้องกับตัวแปรของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งนั้นด้วย จากนั้นใช้สมการรุงเง-คุตตาอันดับสี่ (2.4) ในการหาผลเฉลย สำหรับสมการ f_1, f_2, f_3 และ f_4 สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบวอลแตร์ราใช้สมการ (2.5) ส่วนสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบเฟรดโฮล์มใช้สมการ (2.6)

ปัญหาของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์

ในการแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์โดยใช้วิธีรุงเง-คุตตาในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นและใช้กฎซิมป์สันในการแก้ปัญหาสมการปริพันธ์ ได้เลือกตัวอย่างสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เพื่อมาทดลองหาผลเฉลย โดยการเลือกตัวอย่างผู้วิจัยคัดเลือกตัวอย่างเพื่อนำเสนอโดยให้ตัวอย่างมีความครอบคลุมปัญหาที่ปรากฏทั่ว ๆ ไป โดยมีแนวทางดังนี้

1. เป็นปัญหาสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบวอลแตร์ราและแบบเฟรดโฮล์ม
2. เป็นปัญหาสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์ทั้งแบบเชิงเส้น (Linear) และแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) และสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง

3. มีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

4. เป็นปัญหาที่ทราบผลเฉลยที่แม่นตรง เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการ

ตัวอย่าง 1 สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์วอลแตร์ราที่เป็นแบบไม่เชิงเส้นอันดับสี่ (Arikoglu & Ozkol, 2005)

$$y^{(iv)}(x) = 1 + \int_0^x e^{-t} y^2(t)dt, 0 \le x \le 1$$

เงื่อนไขค่าขอบ $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $y(1)=e$, $y'(1)=e$ ผลเฉลยที่แม่นตรงคือ $y(x)=e^x$

ตัวอย่าง 2 สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เฟรดโฮล์มที่เป็นแบบเชิงเส้นอันดับสอง (Mohammad & Shahmord, 2005)

$$y''(x) = y(x) - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x-t) y(t)dt, 0 \le x \le \pi$$

เงื่อนไขค่าขอบ $y(0)=1, y'(\pi)=0$ ผลเฉลยที่แม่นตรงคือ $y(x)=\cos(x)$

ตัวอย่าง 3 สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์วอลแตร์ราที่เป็นแบบเชิงเส้นอันดับหนึ่ง (Hosseini & Shahmord, 2003)

$$y' = 1 + 2x - y + \int_0^x x(1+2x)e^{s(x-s)} y(s)ds, 0 \le x \le 1$$

เงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0)=1$ ผลเฉลยที่แม่นตรงคือ $y(x)=e^{x^2}$

ตัวอย่าง 4 สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เฟรดโฮล์มที่เป็นแบบเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$y' = (1+2x)(1-e^x) + 2xy + \int_0^1 x(1+2x)e^{s(x-s)} y(s)ds, 0 \le x \le 1$$

เงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0)=1$ ผลเฉลยที่แม่นตรงคือ $y(x)=e^x$

ตัวอย่าง 5 สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์วอลแตร์ราที่เป็นแบบไม่เชิงเส้นอันดับหนึ่ง (Berenguer, Garralda-Guillem, & Ruiz Galan, 2010)

$$y'(x) = 2x - \frac{1}{2}(\sin(x^4)) + \int_0^x x^2 s\cos(x^2 y(s))ds, (x \in [0,1])$$

เงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0)=0$ ผลเฉลยที่แม่นตรงคือ $y(x)=x^2$

ตัวอย่าง 6 สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เฟรดโฮล์มที่เป็นแบบเชิงเส้นอันดับหนึ่ง (Rashidinia & Zarebnia, 2007)

$$u'(x) = \int_0^1 e^{xt} u(t)dt + u(x) + \frac{1-e^{x+1}}{x+1}, 0 \le x \le 1$$

เงื่อนไขค่าเริ่มต้น $u(0)=1$ ผลเฉลยที่แม่นตรงคือ $u(x)=e^x$

การแก้ปัญหาของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์

การแก้ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์โดยใช้วิธีรุงเง-คุตตาในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และใช้กฎซิมป์สันในการแก้ปัญหาในส่วนที่เป็นปริพันธ์ มีขั้นตอนวิธีดังนี้

ขั้นตอนวิธี: (Runge-kutta method with Simpson's rule; RSM)

สำหรับสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบวอลแตร์รา

1. กำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{Y}'(a)$ คือ $y_1(a), y_2(a), \ldots, y_n(a)$ และ $v_i(a) = 0$ คือ $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 0$ โดยที่ $x_0 = a$ และ $i = 1, 2, 3, \ldots, k$

2. แปลงสมการ $y^{(n)}(x)$ เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยให้ตัวแปร $y_1' = y_2, y_2' = y_3, y_3' = y_4, \ldots, y_{n-1}' = y_n, y_n' = y^{(n)}(x)$ สำหรับสมการ (3.1a) จะได้จำนวน n สมการ

3. จากข้อ 2 นำสมการมาดำเนินตามขั้นตอนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่ (2.5) จะได้ f_1, f_2, f_3 และ f_4

4. สำหรับ $v_i(x)$ ใช้กฎของซิมป์สัน กำหนดค่าเริ่มต้น $t = a$ และ $v_i(a) = 0$ ดำเนินตามขั้นตอนวิธี (2.8) โดยที่ $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ และในการดัดแปลงกฎของซิมป์สันโดยเพิ่ม g_1, g_2, g_3 และ g_4 ด้วย (2.9) เพื่อให้สอดคล้องกับการใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่

5. จากข้อ 3 และ 4 คำนวณค่าใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่และวิธีกฎของซิมป์สันไปพร้อม ๆ กัน คือ เริ่มจากคำนวณ $g_1, f_1, g_2, f_2, g_3, f_3, g_4$ และ f_4 ตามลำดับ เพื่อหาค่า $y_{i+1}, y_{i+1/2}$ จากนั้นนำไปคำนวณในกฎของซิมป์สันเพื่อหาค่า A จาก (2.8) เพื่อนำไปใช้ในรอบถัดไป

6. ผลเฉลยประมาณ คือค่า y ที่จุด $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$

ขั้นตอนวิธี: (Runge kutta method with Simpson's rule; RSM)

สำหรับสมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์แบบเฟรดโฮล์ม

1. กำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{Y}'(a)$ คือ $y_1(a), y_2(a), \ldots, y_n(a)$ ที่จุด $x_0 = a$ และกำหนดค่าเริ่มต้น $y_{i+1} = y_i + h, y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2}$ เพื่อนำไปใช้ในกฎของซิมป์สัน

2. แปลงสมการ $y^{(n)}(x)$ เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยให้ตัวแปร $y_1' = y_2, y_2' = y_3, y_3' = y_4, \ldots, y_{n-1}' = y_n, y_n' = y^{(n)}(x)$ สำหรับสมการ (3.2a) จะได้จำนวน n สมการ

3. จากข้อ 2 นำสมการมาดำเนินตามขั้นตอนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่ (2.6) จะได้ f_1, f_2, f_3 และ f_4

4. สำหรับ $u(x)$ ใช้กฎของซิมป์สันกำหนดค่าเริ่มต้น $t = a$ และ $u(a) = 0$ โดยดำเนินตามขั้นตอนวิธี (2.8)

5. จากข้อ 3 และ 4 คำนวณค่าใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่และวิธีกฎของซิมป์สันไปพร้อม ๆ กัน คือ เริ่มจากคำนวณ $A_1, f_1, A_2, f_2, A_3, f_3$ และ f_4 ตามลำดับ เพื่อหาค่า $y_{i+1}, y_{i+1/2}$

6. ผลเฉลยประมาณ คือค่า y ที่จุด $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$

จากขั้นตอนวิธีจะได้ว่า จะแสดงการแก้ปัญหาในตัวอย่าง 3 และ 4 โดยละเอียดดังนี้

ตัวอย่าง 3 สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์วอลแตร์ราที่เป็นแบบเชิงเส้นอันดับหนึ่ง (Hosseini & Shahmord, 2003)

$$y' = 1 + 2x - y + \int_0^x x(1+2x)e^{s(x-s)}y(s)ds$$

เงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0) = 1$ ผลเฉลยที่แม่นตรงคือ $y(x) = e^x$

1. กำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{Y}'(a)$ คือ $y(0) = 1$, $v_1(0) = 0$ คือ $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 0$ โดยที่ $x_0 = 0, t = 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ และกำหนดค่า $h = 0.05$

2. จากสมการ $y' = 1 + 2x - y + x(1+2x)\cdot v$ เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จะได้จำนวน 1 สมการ

3. จากข้อ 2 นำสมการมาดำเนินตามขั้นตอนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่ (2.5) จะได้

$$f_1 = h(1 + 2x - y + x(1+2x)\cdot v)$$

$$f_2 = h(1 + 2(x + \frac{h}{2}) - (y + \frac{f_1}{2}) + (x + \frac{h}{2})(1 + 2(x + \frac{h}{2}))\cdot(v + \frac{1}{2}(g_1 + g_2)\frac{h}{2}))$$

$$f_3 = h(1 + 2(x + \frac{h}{2}) - (y + \frac{f_2}{2}) + (x + \frac{h}{2})(1 + 2(x + \frac{h}{2}))\cdot(v + \frac{1}{2}(g_1 + g_3)\frac{h}{2}))$$

$$f_4 = h(1 + 2(x+h) - (y + f_3) + (x+h)(1 + 2(x+h))\cdot(v + (g_1 + 2(g_2 + g_3) + g_4)\frac{h}{6}))$$

4. สำหรับ $v_i(x) = \int_0^x e^{s(x-s)}y(s)ds$ ใช้กฎของซิมป์สัน กำหนดค่าเริ่มต้น $t = 0$ และ $v_1(0) = 0$ ดำเนินตามขั้นตอนวิธี (2.8) โดยที่ $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ จะได้

$$k_1 = \exp(t\cdot(x-t))\cdot y_i$$

$$k_2 = \exp((t + \frac{h}{2})\cdot(x - t - \frac{h}{2}))\cdot y_{i+1/2}$$

$$k_3 = \exp((t+h)\cdot(x - t - h))\cdot y_{i+1}$$

ดังนั้น $A = A + \frac{h}{6}[k_1 + 4k_2 + k_3], t = t + h$

และในการดัดแปลงกฎของซิมป์สันโดยเพิ่มด้วย (2.9) เพื่อให้สอดคล้องกับการใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่ จะได้

$g_1 = \exp(t\cdot(x+h-t))\cdot y$

$g_2 = \exp((t+\frac{h}{2})\cdot(x+\frac{h}{2}-t))\cdot(y+\frac{f_1}{2})$

$g_3 = \exp((t+\frac{h}{2})\cdot(x+\frac{h}{2}-t))\cdot(y+\frac{f_2}{2})$

$g_4 = \exp((t+h)\cdot(x-t))\cdot(y+f_3)$

5. จากข้อ 3 และ 4 คำนวณค่าใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่และวิธีกฎของซิมป์สันไปพร้อม ๆ กัน คือ เริ่มจากคำนวณ $g_1, f_1, g_2, f_2, g_3, f_3, g_4$ และ f_4 ตามลำดับ เพื่อหาค่า $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(f_1+2f_2+2f_3+f_4)\cdot h$ และ $y_{i+1/2} = y_i + \frac{1}{8}(2f_1+f_2+f_3)\times h$ จากนั้นนำไปคำนวณในกฎของซิมป์สันเพื่อหาค่า A จาก (2.8) เพื่อนำไปใช้ในรอบถัดไป

6. ผลเฉลยประมาณ คือค่า y ที่จุด $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$

ตัวอย่าง 4 สมการเชิงปริพันธ์-อนุพันธ์เฟรดโฮล์มที่เป็นแบบเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$y' = (1+2x)(1-e^x) + 2xy + \int_0^1 x(1+2x)e^{s(x-s)}y(s)ds$$

เงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0)=1$ ผลเฉลยที่แม่นตรงคือ $y(x)=e^x$

1. กำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{Y}'(a)$ คือ $y(0)=1$ ที่จุด $x_0 = 0$ และกำหนดค่าเริ่มต้น $y_{i+1} = y_i + h, y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2}$ เพื่อนำไปใช้ในกฎของซิมป์สัน

2. จากสมการ $y' = (1+2x)(1-e^x) + 2xy + x(1+2x)\cdot u$ เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จะได้จำนวน 1 สมการ

3. จากข้อ 2 นำสมการมาดำเนินตามขั้นตอนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่ (2.6) จะได้

$f_1 = h((1+2x)(1-e^x) + 2xy + x(1+2x)\cdot u)$

$f_2 = h((1+2(x+\frac{h}{2}))(1-e^{(x+\frac{h}{2})}) + 2(x+\frac{h}{2})(y+\frac{f_1}{2}) + (x+\frac{h}{2})(1+2(x+\frac{h}{2}))\cdot u)$

$f_3 = h((1+2(x+\frac{h}{2}))(1-e^{(x+\frac{h}{2})}) + 2(x+\frac{h}{2})(y+\frac{f_2}{2}) + (x+\frac{h}{2})(1+2(x+\frac{h}{2}))\cdot u)$

$f_4 = h((1+2(x+h))(1-e^{(x+h)}) + 2(x+h)(y+f_3) + (x+h)(1+2(x+h))\cdot u)$

4. สำหรับ $u(x) = \int_0^x e^{s(x-s)}y(s)ds$ ใช้กฎของซิมป์สันกำหนดค่าเริ่มต้น $t=0$ และ $u(0)=0$ โดยดำเนินตามขั้นตอนวิธี (2.8)

$k_1 = \exp(t\cdot(x-t))\cdot y_i$

$k_2 = \exp((t+\frac{h}{2})\cdot(x-t-\frac{h}{2}))\cdot y_{i+1/2}$

$k_3 = \exp((t+h)\cdot(x-t-h))\cdot y_{i+1}$

ดังนั้น $A = A + \frac{h}{6}\left[k_1 + 4k_2 + k_3\right]$, $t = t + h$

5. จากข้อ 3 และ 4 คำนวณค่าใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่และวิธีกฎของซิมป์สันไปพร้อม ๆ กัน คือ เริ่มจากคำนวณ $A_1, f_1, A_2, f_2, A_3, f_3$ และ f_4 ตามลำดับ เพื่อหาค่า $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)\cdot h$ และ $y_{i+1/2} = y_i + \frac{1}{8}(2f_1 + f_2 + f_3)\cdot h$

6. ผลเฉลยประมาณ คือค่า y ที่จุด $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$

การแก้ปัญหาค่าขอบในตัวอย่าง 1 กำหนดจุดเริ่มต้น $z_0 = [y(0), y'(0)]^T$

ดังนั้นฟังก์ชัน **F** คือ $\mathbf{F}(z) = \begin{bmatrix} y(1) - e \\ y'(1) - e \end{bmatrix}$

$$y^{(iv)} = 1 + v$$

$v = \int_0^x e^{-t} y^2 dt$ จะได้ $v' = e^{-x} y^2$

การแก้ปัญหาค่าขอบในตัวอย่าง 2 กำหนดจุดเริ่มต้น $z_0 = [y'(0), c_1, c_2]^T$

ดังนั้นฟังก์ชัน **F** คือ $\mathbf{F}(z) = \begin{bmatrix} y'(0) \\ u_1(\pi) - c_1 \\ u_2(\pi) - c_2 \end{bmatrix}$

$$y''(x) = y(x) - \frac{4}{\pi}\cos(x)\cdot c_1 - \frac{4}{\pi}\sin(x)\cdot c_2$$

$u_1 = \int_0^x \cos(t) y(t) dt$ จะได้ $u_1'(x) = \cos(x) y(x)$

$u_2 = \int_0^x \sin(t) y(t) dt$ จะได้ $u_2'(x) = \sin(x) y(x)$

การแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นในตัวอย่าง 5 กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0) = 0$

ดังนั้น $y'(t) = 2t - \frac{1}{2}(\sin(t^4)) + t^2 \cdot v$, $v = \int_0^t s\cos(t^2 y(s))ds$

ผลเฉลยที่แม่นตรงคือ $z(t) = t^2$

การแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นในตัวอย่าง 6 กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $u(0) = 1$

ดังนั้น $u'(x) = v + u(x) + \frac{1 - e^{x+1}}{x+1}$, $v = \int_0^1 e^{xt} u(t) dt$

ผลเฉลยที่แม่นตรงคือ $u(x) = e^x$