# ภาคผนวก

มหาวิทยาลัยบูรพา
Burapha University

# ภาคผนวก ก
# เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

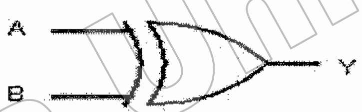
มหาวิทยาลัยบูรพา
Burapha University

# บทเรียน เรื่อง พีชคณิตบูลีน

## สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

$$Y = A \oplus B$$

| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |




นัฐพล นพเก้า

บทเรียนเล่มนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญา
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

# คำนำ

บทเรียน เรื่อง พีชคณิตบูลีน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย จัดทำขึ้นเพื่อให้ครู นักเรียน และผู้ที่สนใจได้ศึกษาเกี่ยวกับพีชคณิตบูลีน ซึ่งเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่ง โดยผู้จัดทำได้รวบรวมเนื้อหาเพื่อใช้เป็นเอกสารประกอบการจัดการเรียนรู้ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในรูปของบทเรียน ประกอบด้วยเนื้อหาทั้งหมด 10 บท ดังนี้

บทนำ
บทที่ 1 เรื่อง เซต {T, F} กับตัวดำเนินการ $\vee$, $\wedge$
บทที่ 2 เรื่อง เซต {U, Ø} กับตัวดำเนินการ $\cup$, $\cap$
บทที่ 3 เรื่อง เซต {1, 0} กับตัวดำเนินการ $\oplus$ , $\otimes$
บทที่ 4 เรื่อง พีชคณิตบูลีน
บทที่ 5 เรื่อง รูปแบบปกติของฟังก์ชันบูลีน
บทที่ 6 เรื่อง การลดรูปของฟังก์ชันบูลีน
บทที่ 7 เรื่อง พีชคณิตวงจรไฟฟ้า
บทที่ 8 เรื่อง รูปแบบปกติของวงจรไฟฟ้า
บทที่ 9 เรื่อง วงจรไฟฟ้าในรูปอย่างง่าย

รายละเอียดในบทเรียน เรื่อง พีชคณิตบูลีน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ เนื้อหาสาระ แบบฝึกหัดระหว่างเรียน และแบบทดสอบหลังเรียน

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่า บทเรียนเล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อครู นักเรียนและผู้สนใจและสามารถนำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ต่อไป

นัฐพล นพเก้า

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

# สารบัญ



มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

## จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทเรียนนี้ นักเรียนสามารถ

1. บอกความเป็นมาของพีชคณิตบูลีนได้
2. บอกประโยชน์ของพีชคณิตบูลีนได้
3. บอกบทนิยามของเซต $\{T, F\}$ กับตัวดำเนินการ $\vee$, $\wedge$ ได้
4. พิสูจน์สมบัติต่าง ๆ ของเซต $\{T, F\}$ กับตัวดำเนินการ $\vee$, $\wedge$ ได้
5. บอกบทนิยามของเซต $\{U, \emptyset\}$ กับตัวดำเนินการ $\cup$, $\cap$ ได้
6. พิสูจน์สมบัติต่าง ๆ ของเซต $\{U, \emptyset\}$ กับตัวดำเนินการ $\cup$, $\cap$ ได้
7. บอกบทนิยามของเซต $\{1, 0\}$ กับตัวดำเนินการ $\oplus$, $\otimes$ ได้
8. พิสูจน์สมบัติต่าง ๆ ของเซต $\{1, 0\}$ กับตัวดำเนินการ $\oplus$, $\otimes$ ได้
9. บอกบทนิยามของพีชคณิตบูลีนได้
10. พิสูจน์สมบัติต่าง ๆ ของพีชคณิตบูลีน โดยใช้บทนิยามและตารางได้
11. เขียนฟังก์ชันบูลีนในรูปแบบปกติที่มีตัวแปร 2 ตัวและ 3 ตัวได้
12. ลดรูปของฟังก์ชันบูลีน โดยวิธีทางพีชคณิตบูลีนหรือแผนผังคาร์โนห์ได้
13. เปลี่ยนวงจรไฟฟ้าให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันบูลีน และเปลี่ยนฟังก์ชันบูลีนให้อยู่ในรูปของวงจรไฟฟ้าได้
14. หาค่าของวงจรไฟฟ้าได้
15. เขียนวงจรไฟฟ้าให้อยู่ในรูปแบบปกติ ได้
16. เขียนวงจรไฟฟ้าให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้
17. อธิบายการไหลของกระแสไฟฟ้าในวงจรได้

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

# บทนำ

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

เมื่อจบบทเรียนนี้ นักเรียนสามารถ

1. บอกความเป็นมาของพีชคณิตบูลีนได้
2. บอกประโยชน์ของพีชคณิตบูลีนได้

ในสาขาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ พีชคณิตบูลีน, พีชคณิตแบบบูล, หรือแลตทิซแบบบูล (Boolean algebra) คือ โครงสร้างเชิงพีชคณิตซึ่งเป็นการรวบรวมแก่นความหมายของการดำเนินการทางตรรกศาสตร์ ทฤษฎีเซต โดยชื่อพีชคณิตบูลีนนั้นตั้งตาม จอร์จ บูลผู้พัฒนาพีชคณิตแบบนี้

จอร์จ บูล (George Boole, ค.ศ.1815-1864) นักคณิตศาสตร์และนักปรัชญาชาวอังกฤษ ที่มหาวิทยาลัย College Cork ผู้ที่นิยามพีชคณิตดังกล่าวขึ้นมาเพื่อเป็นส่วนหนึ่งของระบบทางตรรกศาสตร์ในกลางคริสต์ศตวรรษที่ 19 (ค.ศ. 1854) เขาได้เขียนตำราคณิตศาสตร์ เกี่ยวกับทฤษฎีของตรรกะและความเป็นไปได้ ทฤษฎีดังกล่าว คือ พีชคณิตตรรกะ (Logic Algebra) ต่อมาพีชคณิตสาขานี้จึงได้ชื่อตามผู้ที่คิดค้น คือ พีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra) หรือ บางทีเรียกว่า พีชคณิตสวิตชิ่ง (Switching Algebra)

พีชคณิตบูลีนเป็นทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์และออกแบบวงจรลอจิก โดยนำเทคนิคทางพีชคณิตมาใช้กับนิพจน์ในตรรกศาสตร์เชิงประพจน์ ผู้ที่นำไปใช้คนแรกคือ คลาวด์ อี. แชนนอน (Claud E. Shannon) นักวิทยาศาสตร์แห่งห้องทดลองเบลล์ (Bell Laboratory) ในคริสต์ศตวรรษที่ 20 (ค.ศ. 1938) โดยนำมาใช้ในการวิเคราะห์วงจรเครือข่ายที่ทำงานต่อกันหลาย ๆ ภาค เช่น วงจรของโทรศัพท์ เป็นต้น

พีชคณิตบูลีนนั้นคล้ายกับพีชคณิตทั่วไปตรงที่ประกอบด้วยฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ของค่าคงที่และตัวแปร แต่ค่าคงที่ของพีชคณิตบูลีนคือ ค่า a และ b หรือ 1 และ 0 (ฐานสอง) ส่วนค่าคงที่ในพีชคณิตทั่วไปคือค่าตัวเลขฐาน 10 (ประกอบไปด้วยเลข 0 – 9) ดังนั้นกฎและสูตรต่าง ๆ ของพีชคณิตบูลีนจึงแตกต่างกับกฎและสูตรต่าง ๆ ของพีชคณิตทั่วไป ตัวกระทำในพีชคณิตบูลีนมี 3 ตัว คือ $\otimes$, $\oplus$ และ ~ หรือ AND, OR และ NOT

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

| พีชคณิตทั่วไป | พีชคณิตบูลีน |
|---|---|
| แทนค่าด้วยเลข 0-9 (ฐานสิบ)<br>หาผลลัพธ์โดยการบวก ลบ คูณ หาร | แทนค่าด้วย a และ b<br>หรือ 1 และ 0 (ฐานสอง)<br>หาผลลัพธ์โดยตัวดำเนินการ $\otimes$, $\oplus$ และ ~<br>หรือ ตัวดำเนินการ AND, OR และ NOT |

สิ่งที่จอร์จ บูลคิดค้นขึ้น ทำให้การใช้กระแสไฟฟ้า ซึ่งมีเพียง 2 สภาวะ คือ เปิด กับ ปิด เราแทนด้วยเลขฐานสอง คือ 0 กับ 1 ง่ายกว่าการแทนเลขฐานสิบซึ่งมีอยู่ถึง 10 ตัวคือ 0 ถึง 9

พีชคณิตบูลีนจึงนิยมใช้แก้ไขปัญหาทางวงจรดิจิตอลอิเล็กทรอนิกส์ เช่น ในด้านการออกแบบวงจรดิจิตอลตามเงื่อนไขหรือฟังก์ชันที่กำหนดโดยลักษณะของงานที่แตกต่างกัน การเปลี่ยนรูปแบบของวงจรและการลดต้นทุนการผลิตวงจร ดังนั้นพีชคณิตบูลีนจึงถูกนำไปประยุกต์อย่างแพร่หลายในการออกแบบวงจรไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์ ซึ่งถือว่าสิ่งนี้เป็นรากฐานที่สำคัญของการออกแบบทางตรรกวิทยาของวงจรของระบบคอมพิวเตอร์ในปัจจุบัน

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

## แบบฝึกหัดที่ 1

คำชี้แจง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. พีชคณิตบูลีน คืออะไร
2. ใครเป็นผู้มีแนวคิดเกี่ยวกับพีชคณิตบูลีนเป็นคนแรก
3. พีชคณิตบูลีนเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์เรื่องใดมากที่สุด
4. ผู้นำพีชคณิตบูลีนไปใช้เป็นคนแรกคือใครและใช้อย่างไร
5. พีชคณิตบูลีนคล้ายกับพีชคณิตทั่วไปหรือไม่ อย่างไร
6. ค่าคงตัวในพีชคณิตบูลีนมีกี่ตัว อะไรบ้าง
7. ตัวดำเนินการในพีชคณิตบูลีนมีกี่ตัว อะไรบ้าง
8. พีชคณิตบูลีนเกี่ยวข้องกับกระแสไฟฟ้าอย่างไร
9. พีชคณิตบูลีนนิยมใช้ในการแก้ปัญหาด้านใด
10. พีชคณิตบูลีนมีประโยชน์อย่างไรบ้าง

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

# บทที่ 1

## เซต {T, F} กับตัวดำเนินการ $\vee$, $\wedge$

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทเรียนนี้ นักเรียนสามารถ

1. บอกบทนิยามของเซต {T, F} กับตัวดำเนินการ $\vee$, $\wedge$ ได้
2. พิสูจน์สมบัติต่าง ๆ ของเซต {T, F} กับตัวดำเนินการ $\vee$, $\wedge$ ได้

กำหนด เซต A = {T, F} พร้อมด้วยตัวดำเนินการ $\vee$ (เรียกว่า หรือ) และ $\wedge$ (เรียกว่า และ) โดยนิยามดังนี้

| ตัวดำเนินการ $\vee$ | ตัวดำเนินการ $\wedge$ |
|---|---|
| $T \vee T = T$ | $T \wedge T = T$ |
| $T \vee F = T$ | $T \wedge F = F$ |
| $F \vee T = T$ | $F \wedge T = F$ |
| $F \vee F = F$ | $F \wedge F = F$ |

และ ตัวดำเนินการ ~ (เรียกว่า ไม่) ซึ่งกระทำกับสมาชิกเพียงตัวเดียว โดยนิยามดังนี้

$\sim T = F$

$\sim F = T$

สมบัติของตัวดำเนินการ ให้ $x, y, z \in A$

1. $\sim(\sim x) = x$
2. $x \vee y = y \vee x$
3. $x \wedge y = y \wedge x$
4. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
5. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
6. $x \vee F = x = F \vee x$
7. $x \wedge T = x = T \wedge x$
8. $x \vee \sim x = T$
9. $x \wedge \sim x = F$
10. $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

11. $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$
12. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
13. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
14. $x \vee x = x$
15. $x \wedge x = x$
16. $x \vee (x \wedge y) = x$
17. $x \wedge (x \vee y) = x$

สมบัติของตัวดำเนินการสามารถแสดงการพิสูจน์ ได้ดังนี้

ให้ $x, y, z \in A$

1. $\sim(\sim x) = x$

กรณีที่ 1 $\sim(\sim T) = \sim F = T$

กรณีที่ 2 $\sim(\sim F) = \sim T = F$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $\sim(\sim x) = x$

2. $x \vee y = y \vee x$

กรณีที่ 1 $T \vee T = T \vee T$

กรณีที่ 2 $T \vee F = T$

$F \vee T = T$

ดังนั้น $T \vee F = F \vee T$

กรณีที่ 3 $F \vee T = T$

$T \vee F = T$

ดังนั้น $F \vee T = T \vee F$

กรณีที่ 4 $F \vee F = F \vee F$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $x \vee y = y \vee x$

3. $x \wedge y = y \wedge x$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

4. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

กรณีที่ 1 $(T \vee T) \vee T = T \vee T = T$

$T \vee (T \vee T) = T \vee T = T$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ดังนั้น $(T \vee T) \vee T = T \vee (T \vee T)$

กรณีที่ 2 $(T \vee T) \vee F = T \vee F = T$

$T \vee (T \vee F) = T \vee T = T$

ดังนั้น $(T \vee T) \vee F = T \vee (T \vee F)$

กรณีที่ 3 $(T \vee F) \vee T = T \vee T = T$

$T \vee (F \vee T) = T \vee T = T$

ดังนั้น $(T \vee F) \vee T = T \vee (F \vee T)$

กรณีที่ 4 $(T \vee F) \vee F = T \vee F = T$

$T \vee (F \vee F) = T \vee F = T$

ดังนั้น $(T \vee F) \vee F = T \vee (F \vee F)$

กรณีที่ 5 $(F \vee T) \vee T = T \vee T = T$

$F \vee (T \vee T) = F \vee T = T$

ดังนั้น $(F \vee T) \vee T = F \vee (T \vee T)$

กรณีที่ 6 $(F \vee T) \vee F = T \vee F = T$

$F \vee (T \vee F) = F \vee T = T$

ดังนั้น $(F \vee T) \vee F = F \vee (T \vee F)$

กรณีที่ 7 $(F \vee F) \vee T = F \vee T = T$

$F \vee (F \vee T) = F \vee T = T$

ดังนั้น $(F \vee F) \vee T = F \vee (F \vee T)$

กรณีที่ 8 $(F \vee F) \vee F = F \vee F = F$

$F \vee (F \vee F) = F \vee F = F$

ดังนั้น $(F \vee F) \vee F = F \vee (F \vee F)$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

5. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

6. $x \vee F = x = F \vee x$

กรณีที่ 1 $T \vee F = T = F \vee T$

กรณีที่ 2 $F \vee F = F = F \vee F$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $x \vee F = x = F \vee x$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

7. $x \wedge T = x = T \wedge x$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

8. $x \vee \sim x = T$

กรณีที่ 1 $T \vee \sim T = T \vee F = T$

กรณีที่ 2 $F \vee \sim F = F \vee T = T$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $x \vee \sim x = T$

9. $x \wedge \sim x = F$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

10. $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$

กรณีที่ 1 $\sim(T \vee T) = \sim T = F$

$\sim T \wedge \sim T = F \wedge F = F$

ดังนั้น $\sim(T \vee T) = \sim T \wedge \sim T$

กรณีที่ 2 $\sim(T \vee F) = \sim T = F$

$\sim T \wedge \sim F = F \wedge T = F$

ดังนั้น $\sim(T \vee F) = \sim T \wedge \sim F$

กรณีที่ 3 $\sim(F \vee T) = \sim T = F$

$\sim F \wedge \sim T = T \wedge F = F$

ดังนั้น $\sim(F \vee T) = \sim F \wedge \sim T$

กรณีที่ 4 $\sim(F \vee F) = \sim F = T$

$\sim F \wedge \sim F = T \wedge T = T$

ดังนั้น $\sim(F \vee F) = \sim F \wedge \sim F$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$

11. $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

12. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

กรณีที่ 1 $T \wedge (T \vee T) = T \wedge T = T$

$(T \wedge T) \vee (T \wedge T) = T \vee T = T$

ดังนั้น $T \wedge (T \vee T) = (T \wedge T) \vee (T \wedge T)$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

กรณีที่ 2 $T \wedge (T \vee F) = T \wedge T = T$

$(T \wedge T) \vee (T \wedge F) = T \vee F = T$

ดังนั้น $T \wedge (T \vee F) = (T \wedge T) \vee (T \wedge F)$

กรณีที่ 3 $T \wedge (F \vee T) = T \wedge T = T$

$(T \wedge F) \vee (T \wedge T) = F \vee T = T$

ดังนั้น $T \wedge (F \vee T) = (T \wedge F) \vee (T \wedge T)$

กรณีที่ 4 $T \wedge (F \vee F) = T \wedge F = F$

$(T \wedge F) \vee (T \wedge F) = F \vee F = F$

ดังนั้น $T \wedge (F \vee F) = (T \wedge F) \vee (T \wedge F)$

กรณีที่ 5 $F \wedge (T \vee T) = F \wedge T = F$

$(F \wedge T) \vee (F \wedge T) = F \vee F = F$

ดังนั้น $F \wedge (T \vee T) = (F \wedge T) \vee (F \wedge T)$

กรณีที่ 6 $F \wedge (T \vee F) = F \wedge T = F$

$(F \wedge T) \vee (F \wedge F) = F \vee F = F$

ดังนั้น $F \wedge (T \vee F) = (F \wedge T) \vee (F \wedge F)$

กรณีที่ 7 $F \wedge (F \vee T) = F \wedge T = F$

$(F \wedge F) \vee (F \wedge T) = F \vee F = F$

ดังนั้น $T \wedge (T \vee T) = (T \wedge T) \vee (T \wedge T)$

กรณีที่ 8 $F \wedge (F \vee F) = F \wedge F = F$

$(F \wedge F) \vee (F \wedge F) = F \vee F = F$

ดังนั้น $F \wedge (F \vee F) = (F \wedge F) \vee (F \wedge F)$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

13. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

14. $x \vee x = x$

กรณีที่ 1 $T \vee T = T \vee T = T$

กรณีที่ 2 $F \vee F = F \vee F = F$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $x \vee x = x$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

15. $x \wedge x = x$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

16. $x \vee (x \wedge y) = x$

กรณีที่ 1 $T \vee (T \wedge T) = T \vee T = T$

กรณีที่ 2 $T \vee (T \wedge F) = T \vee F = T$

กรณีที่ 3 $F \vee (F \wedge T) = F \vee F = F$

กรณีที่ 4 $F \vee (F \wedge F) = F \vee F = F$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $x \vee (x \wedge y) = x$

17. $x \wedge (x \vee y) = x$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

## แบบฝึกหัดที่ 2

<u>คำชี้แจง</u> ให้นักเรียนพิสูจน์สมบัติต่อไปนี้

ให้ $x, y, z \in A$ และ $A = \{T, F\}$

1. $x \wedge y = y \wedge x$
2. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
3. $x \wedge T = x$
4. $x \wedge \sim x = F$
5. $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$
6. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
7. $x \wedge x = x$
8. $x \wedge (x \vee y) = x$
9. $(x \wedge y) \vee (\sim x \vee \sim y) = T$
10. $(x \vee y \vee z) \wedge \sim z = (x \vee y) \wedge \sim z$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

# บทที่ 2

## เซต $\{U, \emptyset\}$ กับตัวดำเนินการ $\cup, \cap$

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

เมื่อจบบทเรียนนี้ นักเรียนสามารถ

1. บอกบทนิยามของเซต $\{U, \emptyset\}$ กับตัวดำเนินการ $\cup, \cap$ ได้
2. พิสูจน์สมบัติต่าง ๆ ของเซต $\{U, \emptyset\}$ กับตัวดำเนินการ $\cup, \cap$ ได้

กำหนด เซต $C = \{U, \phi\}$ พร้อมด้วยตัวดำเนินการ $\cup$ (เรียกว่า ยูเนียน) และ $\cap$ (เรียกว่า อินเตอร์เซคชัน) โดยนิยามดังนี้

| ตัวดำเนินการ $\cup$ | ตัวดำเนินการ $\cap$ |
|---|---|
| $U \cup U = U$ | $U \cap U = U$ |
| $U \cup \phi = U$ | $U \cap \phi = \phi$ |
| $\phi \cup U = U$ | $\phi \cap U = \phi$ |
| $\phi \cup \phi = \phi$ | $\phi \cap \phi = \phi$ |

และ ตัวดำเนินการ ~ (เรียกว่า ไม่) ซึ่งกระทำกับสมาชิกเพียงตัวเดียว โดยนิยามดังนี้

$\sim U = \phi$ $\qquad$ $\sim \phi = U$

สมบัติของตัวดำเนินการ

ให้ $x, y, z \in C$

1. $\sim(\sim x) = x$
2. $x \cup y = y \cup x$
3. $x \cap y = y \cap x$
4. $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$
5. $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$
6. $x \cup \phi = x = \phi \cup x$
7. $x \cap U = x = U \cap x$
8. $x \cup \sim x = U$
9. $x \cap \sim x = \phi$
10. $\sim(x \cup y) = \sim x \cap \sim y$
11. $\sim(x \cap y) = \sim x \cup \sim y$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

12. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$

13. $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$

14. $x \cup x = x$

15. $x \cap x = x$

16. $x \cup (x \cap y) = x$

17. $x \cap (x \cup y) = x$

สมบัติของตัวดำเนินการสามารถแสดงการพิสูจน์ ได้ดังนี้

ให้ $x, y, z \in C$

1. $\sim(\sim x) = x$

กรณีที่ 1 $\sim(\sim U) = \sim \varnothing = U$ ,

กรณีที่ 2 $\sim(\sim \varnothing) = \sim U = \varnothing$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $\sim(\sim x) = x$

2. $x \cup y = y \cup x$

กรณีที่ 1 $U \cup U = U \cup U$

กรณีที่ 2 $U \cup \phi = U$

$\phi \cup U = U$

ดังนั้น $U \cup \phi = \phi \cup U$

กรณีที่ 3 $\phi \cup U = U$

$U \cup \phi = U$

ดังนั้น $\phi \cup U = U \cup \phi$

กรณีที่ 4 $\phi \cup \phi = \phi \cup \phi$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $x \cup y = y \cup x$

3. $x \cap y = y \cap x$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

4. $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

5. $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

กรณีที่ 1 $(U \cap U) \cap U = U \cap U = U$

$U \cap (U \cap U) = U \cap U = U$

ดังนั้น $(U \cap U) \cap U = U \cap (U \cap U)$

กรณีที่ 2 $(U \cap U) \cap \phi = U \cap \phi = \phi$

$U \cap (U \cap \phi) = U \cap \phi = \phi$

ดังนั้น $(U \cap U) \cap \phi = U \cap (U \cap \phi)$

กรณีที่ 3 $(U \cap \phi) \cap U = \phi \cap U = \phi$

$U \cap (\phi \cap U) = U \cap \phi = \phi$

ดังนั้น $(U \cap \phi) \cap U = U \cap (\phi \cap U)$

กรณีที่ 4 $(U \cap \phi) \cap \phi = \phi \cap \phi = \phi$

$U \cap (\phi \cap \phi) = U \cap \phi = \phi$

ดังนั้น $(U \cap \phi) \cap \phi = U \cap (\phi \cap \phi)$

กรณีที่ 5 $(\phi \cap U) \cap U = \phi \cap U = \phi$

$\phi \cap (U \cap U) = \phi \cap U = \phi$

ดังนั้น $(\phi \cap U) \cap U = \phi \cap (U \cap U)$

กรณีที่ 6 $(\phi \cap U) \cap \phi = \phi \cap \phi = \phi$

$\phi \cap (U \cap \phi) = \phi \cap \phi = \phi$

ดังนั้น $(\phi \cap U) \cap \phi = \phi \cap (U \cap \phi)$

กรณีที่ 7 $(\phi \cap \phi) \cap U = \phi \cap U = \phi$

$\phi \cap (\phi \cap U) = \phi \cap \phi = \phi$

ดังนั้น $(\phi \cap \phi) \cap U = \phi \cap (\phi \cap U)$

กรณีที่ 8 $(\phi \cap \phi) \cap \phi = \phi \cap \phi = \phi$

$\phi \cap (\phi \cap \phi) = \phi \cap \phi = \phi$

ดังนั้น $(\phi \cap \phi) \cap \phi = \phi \cap (\phi \cap \phi)$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$

6. $x \cup \phi = x = \phi \cup x$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

7. $x \cap U = x = U \cap x$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

8. $x \cup \sim x = U$

กรณีที่ 1 $U \cup \sim U = U \cup \phi = U$

กรณีที่ 2 $\phi \cup \sim \phi = \phi \cup U = U$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $x \cup \sim x = U$

9. $x \cap \sim x = \phi$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

10. $\sim(x \cup y) = \sim x \cap \sim y$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

11. $\sim(x \cap y) = \sim x \cup \sim y$

กรณีที่ 1 $\sim(U \cap U) = \sim U = \phi$

$\sim U \cup \sim U = \phi \cup \phi = \phi$

ดังนั้น $\sim(U \cap U) = \sim U \cup \sim U$

กรณีที่ 2 $\sim(U \cap \phi) = \sim \phi = U$

$\sim U \cup \sim \phi = \phi \cup U = U$

ดังนั้น $\sim(U \cap \phi) = \sim U \cup \sim \phi$

กรณีที่ 3 $\sim(\phi \cap U) = \sim \phi = U$

$\sim \phi \cup \sim U = U \cup \phi = U$

ดังนั้น $\sim(\phi \cap U) = \sim \phi \cup \sim U$

กรณีที่ 4 $\sim(\phi \cap \phi) = \sim \phi = U$

$\sim \phi \cup \sim \phi = U \cup U = U$

ดังนั้น $\sim(\phi \cap \phi) = \sim \phi \cup \sim \phi$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $\sim(x \cap y) = \sim x \cup \sim y$

12. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

13. $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$

กรณีที่ 1 $U \cup (U \cap U) = U \cup U = U$

$(U \cup U) \cap (U \cup U) = U \cap U = U$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ดังนั้น $U \cup (U \cap U) = (U \cup U) \cap (U \cup U)$

กรณีที่ 2 $U \cup (U \cap \phi) = U \cup \phi = U$

$(U \cup U) \cap (U \cup \phi) = U \cap U = U$

ดังนั้น $U \cup (U \cap \phi) = (U \cup U) \cap (U \cup \phi)$

กรณีที่ 3 $U \cup (\phi \cap U) = U \cup \phi = U$

$(U \cup \phi) \cap (U \cup U) = U \cap U = U$

ดังนั้น $U \cup (\phi \cap U) = (U \cup \phi) \cap (U \cup U)$

กรณีที่ 4 $U \cup (\phi \cap \phi) = U \cup \phi = U$

$(U \cup \phi) \cap (U \cup \phi) = U \cap U = U$

ดังนั้น $U \cup (\phi \cap \phi) = (U \cup \phi) \cap (U \cup \phi)$

กรณีที่ 5 $\phi \cup (U \cap U) = \phi \cup U = U$

$(\phi \cup U) \cap (\phi \cup U) = U \cap U = U$

ดังนั้น $\phi \cup (U \cap U) = (\phi \cup U) \cap (\phi \cup U)$

กรณีที่ 6 $\phi \cup (U \cap \phi) = \phi \cup \phi = \phi$

$(\phi \cup U) \cap (\phi \cup \phi) = U \cap \phi = \phi$

ดังนั้น $\phi \cup (U \cap \phi) = (\phi \cup U) \cap (\phi \cup \phi)$

กรณีที่ 7 $\phi \cup (\phi \cap U) = \phi \cup \phi = \phi$

$(\phi \cup \phi) \cap (\phi \cup U) = \phi \cap U = \phi$

ดังนั้น $\phi \cup (\phi \cap U) = (\phi \cup \phi) \cap (\phi \cup U)$

กรณีที่ 8 $\phi \cup (\phi \cap \phi) = \phi \cup \phi = \phi$

$(\phi \cup \phi) \cap (\phi \cup \phi) = \phi \cap \phi = \phi$

ดังนั้น $\phi \cup (\phi \cap \phi) = (\phi \cup \phi) \cap (\phi \cup \phi)$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$

14. $x \cup x = x$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

15. $x \cap x = x$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

16. $x \cup (x \cap y) = x$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

17. $x \cap (x \cup y) = x$

กรณีที่ 1 $U \cap (U \cup U) = U \cap U = U$

กรณีที่ 2 $U \cap (U \cup \phi) = U \cap U = U$

กรณีที่ 3 $\phi \cap (\phi \cup U) = \phi \cap U = \phi$

กรณีที่ 4 $\phi \cap (\phi \cup \phi) = \phi \cap \phi = \phi$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $x \cap (x \cup y) = x$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

# แบบฝึกหัดที่ 3

<u>คำชี้แจง</u> ให้นักเรียนพิสูจน์สมบัติต่อไปนี้

ให้ $x, y, z \in C$ และ $C = \{U, \phi\}$

1. $x \cap y = y \cap x$
2. $x \cap x = x$
3. $x \cup x = x$
4. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$
5. $\sim(x \cup y) = \sim x \cap \sim y$
6. $x \cap \sim x = \phi$
7. $x \cap U = x$
8. $x \cup \phi = x$
9. $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$
10. $x \cup (x \cap y) = x$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

# บทที่ 3

## เซต $\{1, 0\}$ กับตัวดำเนินการ $\oplus$ , $\otimes$

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

เมื่อจบบทเรียนนี้ นักเรียนสามารถ

1. บอกบทนิยามของเซต $\{1, 0\}$ กับตัวดำเนินการ $\oplus$ , $\otimes$ ได้
2. พิสูจน์สมบัติต่าง ๆ ของเซต $\{1, 0\}$ กับตัวดำเนินการ $\oplus$ , $\otimes$ ได้

กำหนด เซต $D = \{1, 0\}$ พร้อมด้วยตัวดำเนินการ $\oplus$ (เรียกว่า บวก) และ $\otimes$ (เรียกว่า คูณ) โดยนิยามดังนี้

| ตัวดำเนินการ $\oplus$ | ตัวดำเนินการ $\otimes$ |
|---|---|
| $1 \oplus 1 = 1$ | $1 \otimes 1 = 1$ |
| $1 \oplus 0 = 1$ | $1 \otimes 0 = 0$ |
| $0 \oplus 1 = 1$ | $0 \otimes 1 = 0$ |
| $0 \oplus 0 = 0$ | $0 \otimes 0 = 0$ |

และ ตัวดำเนินการ ~ (เรียกว่า ไม่) ซึ่งกระทำกับสมาชิกเพียงตัวเดียว โดยนิยามดังนี้

$\sim 1 = 0$ $\qquad$ $\sim 0 = 1$

สมบัติของตัวดำเนินการ

ให้ $x, y, z \in C$

1. $\sim(\sim x) = x$
2. $x \oplus y = y \oplus x$
3. $x \otimes y = y \otimes x$
4. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
5. $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$
6. $x \oplus 0 = x = 0 \oplus x$
7. $x \otimes 1 = x = 1 \otimes x$
8. $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$
9. $x \oplus (y \otimes z) = (x \oplus y) \otimes (x \oplus z)$
10. $x \oplus x = x$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

11. $x \otimes x = x$
12. $x \oplus (x \otimes y) = x$
13. $x \otimes (x \oplus y) = x$
14. $x \oplus \sim x = 1$
15. $x \otimes \sim x = 0$
16. $\sim(x \oplus y) = \sim x \otimes \sim y$
17. $\sim(x \otimes y) = \sim x \oplus \sim y$

สมบัติของตัวดำเนินการสามารถแสดงการพิสูจน์ ได้ดังนี้

ให้ $x, y, z \in D$

1. $\sim(\sim x) = x$

กรณีที่ 1 $\sim(\sim 1) = \sim 0 = 1$

กรณีที่ 2 $\sim(\sim 0) = \sim 1 = 0$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $\sim(\sim x) = x$

2. $x \oplus y = y \oplus x$

กรณีที่ 1 $1 \oplus 1 = 1 \oplus 1$

กรณีที่ 2 $1 \oplus 0 = 1$

$0 \oplus 1 = 1$

ดังนั้น $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1$

กรณีที่ 3 $0 \oplus 1 = 1$

$1 \oplus 0 = 1$

ดังนั้น $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0$

กรณีที่ 4 $0 \oplus 0 = 0 \oplus 0$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $x \oplus y = y \oplus x$

3. $x \otimes y = y \otimes x$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

4. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

กรณีที่ 1 $(1 \oplus 1) \oplus 1 = 1 \oplus 1 = 1$

$1 \oplus (1 \oplus 1) = 1 \oplus 1 = 1$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ดังนั้น $(1 \oplus 1) \oplus 1 = 1 \oplus (1 \oplus 1)$

กรณีที่ 2 $(1 \oplus 1) \oplus 0 = 1 \oplus 0 = 1$

$1 \oplus (1 \oplus 0) = 1 \oplus 1 = 1$

ดังนั้น $(1 \oplus 1) \oplus 0 = 1 \oplus (1 \oplus 0)$

กรณีที่ 3 $(1 \oplus 0) \oplus 1 = 1 \oplus 1 = 1$

$1 \oplus (0 \oplus 1) = 1 \oplus 1 = 1$

ดังนั้น $(1 \oplus 0) \oplus 1 = 1 \oplus (0 \oplus 1)$

กรณีที่ 4 $(1 \oplus 0) \oplus 0 = 1 \oplus 0 = 1$

$1 \oplus (0 \oplus 0) = 1 \oplus 0 = 1$

ดังนั้น $(1 \oplus 0) \oplus 0 = 1 \oplus (0 \oplus 0)$

กรณีที่ 5 $(0 \oplus 1) \oplus 1 = 1 \oplus 1 = 1$

$0 \oplus (1 \oplus 1) = 0 \oplus 1 = 1$

ดังนั้น $(0 \oplus 1) \oplus 1 = 0 \oplus (1 \oplus 1)$

กรณีที่ 6 $(0 \oplus 1) \oplus 0 = 1 \oplus 0 = 1$

$0 \oplus (1 \oplus 0) = 0 \oplus 1 = 1$

ดังนั้น $(0 \oplus 1) \oplus 0 = 0 \oplus (1 \oplus 0)$

กรณีที่ 7 $(0 \oplus 0) \oplus 1 = 0 \oplus 1 = 1$

$0 \oplus (0 \oplus 1) = 0 \oplus 1 = 1$

ดังนั้น $(0 \oplus 0) \oplus 1 = 0 \oplus (0 \oplus 1)$

กรณีที่ 8 $(0 \oplus 0) \oplus 0 = 0 \oplus 0 = 0$

$0 \oplus (0 \oplus 0) = 0 \oplus 0 = 0$

ดังนั้น $(0 \oplus 0) \oplus 0 = 0 \oplus (0 \oplus 0)$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

5. $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

6. $x \oplus 0 = x = 0 \oplus x$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

7. $x \otimes 1 = x = 1 \otimes x$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

8. $x \oplus \sim x = 1$

กรณีที่ 1 $1 \oplus \sim 1 = 1 \oplus 0 = 1$

กรณีที่ 2 $0 \oplus \sim 0 = 0 \oplus 1 = 1$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $x \oplus \sim x = 1$

9. $x \otimes \sim x = 0$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

10. $\sim(x \oplus y) = \sim x \otimes \sim y$

กรณีที่ 1 $\sim(1 \oplus 1) = \sim 1 = 0$

$\sim 1 \otimes \sim 1 = 0 \otimes 0 = 0$

ดังนั้น $\sim(1 \oplus 1) = \sim 1 \otimes \sim 1$

กรณีที่ 2 $\sim(1 \oplus 0) = \sim 1 = 0$

$\sim 1 \otimes \sim 0 = 0 \otimes 1 = 0$

ดังนั้น $\sim(1 \oplus 0) = \sim 1 \otimes \sim 0$

กรณีที่ 3 $\sim(0 \oplus 1) = \sim 1 = 0$

$\sim 0 \otimes \sim 1 = 1 \otimes 0 = 0$

ดังนั้น $\sim(0 \oplus 1) = \sim 0 \otimes \sim 1$

กรณีที่ 4 $\sim(0 \oplus 0) = \sim 0 = 1$

$\sim 0 \otimes \sim 0 = 1 \otimes 1 = 1$

ดังนั้น $\sim(0 \oplus 0) = \sim 0 \otimes \sim 0$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $\sim(x \oplus y) = \sim x \otimes \sim y$

11. $\sim(x \otimes y) = \sim x \oplus \sim y$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

12. $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

กรณีที่ 1 $1 \otimes (1 \oplus 1) = 1 \otimes 1 = 1$

$(1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes 1) = 1 \oplus 1 = 1$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ดังนั้น $1 \otimes (1 \oplus 1) = (1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes 1)$

กรณีที่ 2 $1 \otimes (1 \oplus 0) = 1 \otimes 1 = 1$

$(1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes 0) = 1 \oplus 0 = 1$

ดังนั้น $1 \otimes (1 \oplus 0) = (1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes 0)$

กรณีที่ 3 $1 \otimes (0 \oplus 1) = 1 \otimes 1 = 1$

$(1 \otimes 0) \oplus (1 \otimes 1) = 0 \oplus 1 = 1$

ดังนั้น $1 \otimes (1 \oplus 1) = (1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes 1)$

กรณีที่ 4 $1 \otimes (0 \oplus 0) = 1 \otimes 0 = 0$

$(1 \otimes 0) \oplus (1 \otimes 0) = 0 \oplus 0 = 0$

ดังนั้น $1 \otimes (0 \oplus 0) = (1 \otimes 0) \oplus (1 \otimes 0)$

กรณีที่ 5 $0 \otimes (1 \oplus 1) = 0 \otimes 1 = 0$

$(0 \otimes 1) \oplus (0 \otimes 1) = 0 \oplus 0 = 0$

ดังนั้น $0 \otimes (1 \oplus 1) = (0 \otimes 1) \oplus (0 \otimes 1)$

กรณีที่ 6 $0 \otimes (1 \oplus 0) = 0 \otimes 1 = 0$

$(0 \otimes 1) \oplus (0 \otimes 0) = 0 \oplus 0 = 0$

ดังนั้น $0 \otimes (1 \oplus 0) = (0 \otimes 1) \oplus (0 \otimes 0)$

กรณีที่ 7 $0 \otimes (0 \oplus 1) = 0 \otimes 1 = 0$

$(0 \otimes 0) \oplus (0 \otimes 1) = 0 \oplus 0 = 0$

ดังนั้น $0 \otimes (0 \oplus 1) = (0 \otimes 0) \oplus (0 \otimes 1)$

กรณีที่ 8 $0 \otimes (0 \oplus 0) = 0 \otimes 0 = 0$

$(0 \otimes 0) \oplus (0 \otimes 0) = 0 \oplus 0 = 0$

ดังนั้น $0 \otimes (0 \oplus 0) = (0 \otimes 0) \oplus (0 \otimes 0)$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $(x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

13. $x \oplus (y \otimes z) = (x \oplus y) \otimes (x \oplus z)$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

14. $x \oplus x = x$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

15. $x \otimes x = x$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

16. $x \oplus (x \otimes y) = x$

กรณีที่ 1 $1 \oplus (1 \otimes 1) = 1 \oplus 1 = 1$

กรณีที่ 2 $1 \oplus (1 \otimes 0) = 1 \oplus 0 = 1$

กรณีที่ 3 $0 \oplus (0 \otimes 1) = 0 \oplus 0 = 0$

กรณีที่ 4 $0 \oplus (0 \otimes 0) = 0 \oplus 0 = 0$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $x \oplus (x \otimes y) = x$

17. $x \otimes (x \oplus y) = x$

ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

<u>ข้อสังเกต</u>

นิยามและสมบัติของตัวดำเนินการในพีชคณิตบูลีนคล้ายกับในพีชคณิตจำนวนจริง ยกเว้น

1. ในพีชคณิตบูลีน $1 \oplus 1 = 1$ แต่ในพีชคณิตทั่วไป $1 + 1 = 2$
2. ในพีชคณิตบูลีน $x \oplus (y \otimes z) = (x \oplus y) \otimes (x \oplus z)$

   แต่ในพีชคณิตจำนวนจริง $x + (y \bullet z) \neq (x + y) \bullet (x + z)$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

# แบบฝึกหัดที่ 4

<u>คำชี้แจง</u> ให้นักเรียนพิสูจน์สมบัติต่อไปนี้

ให้ $x, y, z \in D$ และ $D = \{1, 0\}$

1. $x \otimes (x \oplus y) = x$
2. $x \otimes x = x$
3. $x \oplus x = x$
4. $\sim(x \otimes y) = \sim x \oplus \sim y$
5. $x \otimes \sim x = 0$
6. $x \otimes 1 = x$
7. $x \oplus 0 = x$
8. $x \otimes y = y \otimes x$
9. $x \oplus (y \otimes z) = (x \oplus y) \otimes (x \oplus z)$
10. $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

# บทที่ 4
# พีชคณิตบูลีน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทเรียนนี้ นักเรียนสามารถ

1. บอกบทนิยามของพีชคณิตบูลีนได้
2. พิสูจน์สมบัติต่าง ๆ ของพีชคณิตบูลีน โดยใช้บทนิยามและตารางได้

กำหนด เซต B = {a, b} พร้อมด้วยตัวดำเนินการ $\oplus$ (เรียกว่า บวก) และ $\otimes$ (เรียกว่า คูณ) โดยนิยามดังนี้

ตัวดำเนินการ $\oplus$

$a \oplus a = a$

$a \oplus b = a$

$b \oplus a = a$

$b \oplus b = b$

ตัวดำเนินการ $\otimes$

$a \otimes a = a$

$a \otimes b = b$

$b \otimes a = b$

$b \otimes b = b$

และ ตัวดำเนินการ ~ (เรียกว่า ไม่) ซึ่งกระทำกับสมาชิกเพียงตัวเดียว โดยนิยามดังนี้

$\sim a = b$ $\quad\quad$ $\sim b = a$

สมบัติของตัวดำเนินการ

ให้ $x, y, z \in B$

1. $\sim(\sim x) = x$
2. $x \oplus y = y \oplus x$
3. $x \otimes y = y \otimes x$
4. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
5. $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$
6. $x \oplus b = x = b \oplus x$
7. $x \otimes a = x = a \otimes x$
8. $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$
9. $x \oplus (y \otimes z) = (x \oplus y) \otimes (x \oplus z)$
10. $x \oplus x = x$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

11. $x \otimes x = x$
12. $x \oplus (x \otimes y) = x$
13. $x \otimes (x \otimes y) = x$
14. $x \oplus \sim x = a$
15. $x \otimes \sim x = b$
16. $\sim(x \oplus y) = \sim x \otimes \sim y$
17. $\sim(x \otimes y) = \sim x \oplus \sim y$

<u>หมายเหตุ</u> เราอาจเขียนแทน $\sim x$ ด้วย $x'$ , แทน $\oplus$ ด้วย $\cup$ และแทน $\otimes$ ด้วย $\cap$
เราจะเรียก เซต $B = \{a, b\}$ พร้อมด้วยตัวดำเนินการ $\oplus$ และ $\otimes$ ว่าพีชคณิตบูลีน

สมบัติของตัวดำเนินการสามารถแสดงการพิสูจน์ ได้ดังนี้

ให้ $x, y, z \in B$

1. $\sim(\sim x) = x$

กรณีที่ 1 $\quad \sim(\sim a) = \sim b = a$

กรณีที่ 2 $\quad \sim(\sim b) = \sim a = b$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $\sim(\sim x) = x$

2. $x \oplus y = y \oplus x$

กรณีที่ 1 $\quad a \oplus a = a \oplus a$

กรณีที่ 2 $\quad a \oplus b = a$

$b \oplus a = a$

ดังนั้น $\quad a \oplus b = b \oplus a$

กรณีที่ 3 $\quad b \oplus a = a$

$a \oplus b = a$

ดังนั้น $\quad b \oplus a = a \oplus b$

กรณีที่ 4 $\quad b \oplus b = b \oplus b$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $x \oplus y = y \oplus x$

3. $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$

กรณีที่ 1 $\quad (a \otimes a) \otimes a = a \otimes a = a$

$a \otimes (a \otimes a) = a \otimes a = a$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ดังนั้น $(a \otimes a) \otimes a = a \otimes (a \otimes a)$

กรณีที่ 2 $(a \otimes a) \otimes b = a \otimes b = a$

$a \otimes (a \otimes b) = a \otimes a = a$

ดังนั้น $(a \otimes a) \otimes b = a \otimes (a \otimes b)$

กรณีที่ 3 $(a \otimes b) \otimes a = a \otimes a = a$

$a \otimes (b \otimes a) = a \otimes a = a$

ดังนั้น $(a \otimes b) \otimes a = a \otimes (b \otimes a)$

กรณีที่ 4 $(a \otimes b) \otimes b = a \otimes b = a$

$a \otimes (b \otimes b) = a \otimes b = a$

ดังนั้น $(a \otimes b) \otimes b = a \otimes (b \otimes b)$

กรณีที่ 5 $(b \otimes a) \otimes a = a \otimes a = a$

$b \otimes (a \otimes a) = b \otimes a = a$

ดังนั้น $(b \otimes a) \otimes a = b \otimes (a \otimes a)$

กรณีที่ 6 $(b \otimes a) \otimes b = a \otimes b = a$

$b \otimes (a \otimes b) = b \otimes a = a$

ดังนั้น $(b \otimes a) \otimes b = b \otimes (a \otimes b)$

กรณีที่ 7 $(b \otimes b) \otimes a = b \otimes a = a$

$b \otimes (b \otimes a) = b \otimes a = a$

ดังนั้น $(b \otimes b) \otimes a = b \otimes (b \otimes a)$

กรณีที่ 8 $(b \otimes b) \otimes b = b \otimes b = b$

$b \otimes (b \otimes b) = b \otimes b = b$

ดังนั้น $(b \otimes b) \otimes b = b \otimes (b \otimes b)$

จากการพิสูจน์กรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณี จะได้ว่า $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$

สำหรับสมบัติข้ออื่น ๆ ที่เหลือ ให้นักเรียนพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

นอกจากนี้ เรายังสามารถใช้ตารางตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ได้อีกด้วย ดังตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง</u> จงตรวจสอบว่าสมบัติต่อไปนี้เป็นจริงโดยใช้ตาราง

1. $(x \otimes y) \oplus \sim[(x \oplus \sim y) \otimes y] = a$
2. $(x \otimes \sim y) \otimes (\sim x \otimes y) = b$
3. $(y \oplus z) \otimes x = (y \otimes x) \oplus (z \otimes x)$

1. <u>วิธีทำ</u> เราจะสร้างตารางดังนี้

| $x$ | $y$ | $\sim y$ | $u = x \otimes y$ | $x \oplus \sim y$ | $v = (x \oplus \sim y) \otimes y$ | $\sim v$ | $u \oplus \sim v$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | a | b | a | a | a | b | a |
| a | b | a | b | a | b | a | a |
| b | a | b | b | b | b | a | a |
| b | b | a | b | a | b | a | a |

จากตาราง จะเห็นว่า $(x \otimes y) \oplus \sim((x \oplus \sim y) \otimes y) = a$ ทุกกรณีของ x และ y

ดังนั้น $(x \otimes y) \oplus \sim((x \oplus \sim y) \otimes y) = a$

**2.** <u>วิธีทำ</u> เราจะสร้างตารางดังนี้

| $x$ | $y$ | $\sim x$ | $\sim y$ | $u = x \otimes \sim y$ | $v = \sim x \otimes y$ | $u \otimes v$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a | a | b | b | b | b | b |
| a | b | b | a | a | b | b |
| b | a | a | b | b | a | b |
| b | b | a | a | b | b | b |

จากตาราง จะเห็นว่า $(x \otimes \sim y) \otimes (\sim x \otimes y) = b$ ทุกกรณีของ x และ y

ดังนั้น $(x \otimes \sim y) \otimes (\sim x \otimes y) = b$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

3. <u>วิธีทำ</u> เราจะสร้างตารางดังนี้

| x | Y | z | $y \oplus z$ | $(y \oplus z) \otimes x$ | $y \otimes x$ | $z \otimes x$ | $(y \otimes x) \oplus (z \otimes x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | a | a | a | a | a | a | a |
| a | a | b | a | a | a | b | a |
| a | b | a | a | a | b | a | a |
| a | b | b | b | b | b | b | b |
| b | a | a | a | b | b | b | b |
| b | a | b | a | b | b | b | b |
| b | b | a | a | b | b | b | b |
| b | b | b | b | b | b | b | b |

จากตาราง จะเห็นว่า $(y \oplus z) \otimes x = (y \otimes x) \oplus (z \otimes x)$ ทุกกรณีของ x, y และ z

ดังนั้น $((y \oplus z) \otimes x = (y \otimes x) \oplus (z \otimes x)$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

# แบบฝึกหัดที่ 5

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิสูจน์สมบัติต่อไปนี้ โดยใช้ตาราง

ให้ $x, y, z \in B$ และ $B = \{a, b\}$

1. $x \otimes y = y \otimes x$
2. $x \oplus x = x$
3. $x \otimes (x \oplus y) = x$
4. $x \oplus \sim x = a$
5. $\sim(x \otimes y) = \sim x \oplus \sim y$
6. $x \oplus a = a$
7. $(x \otimes \sim y) \otimes y = b$
8. $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$
9. $(x \otimes \sim y) \oplus (x \otimes \sim z) = x \otimes \sim(y \otimes z)$
10. $(x \oplus y) \otimes (y \oplus z) \otimes (x \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (y \otimes z) \oplus (x \otimes z)$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

เราได้แสดงการพิสูจน์แล้วว่าสมบัติข้อที่ 1 – 17 ว่าเป็นจริง เพราะฉะนั้น เราสามารถใช้สมบัติทั้ง 17 ข้อ มาพิสูจน์สมบัติอื่น ๆ ได้ ดังตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง</u> สำหรับทุกๆ $x, y \in B$, จงพิสูจน์ว่าสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $x \oplus x = x$
2. $x \otimes x = x$
3. $x \otimes b = b$
4. $x \oplus a = a$
5. $x \oplus (x \otimes y) = x$
6. $x \otimes (x \oplus y) = x$
7. $(x \otimes y) \oplus \sim((x \oplus \sim y) \otimes y) = a$

1. <u>พิสูจน์</u>

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x \oplus x$ | $=$ | $(x \oplus x) \otimes a$ | $(x \otimes a = x)$ |
| | $=$ | $(x \oplus x) \otimes (x \oplus \sim x)$ | $(a = x \oplus \sim x)$ |
| | $=$ | $x \oplus (x \otimes \sim x)$ | $((x \oplus y) \otimes (x \oplus z) = x \oplus (y \otimes z))$ |
| | $=$ | $x \oplus b$ | $(x \otimes \sim x = b)$ |
| | $=$ | $x$ | $(x \oplus b = x)$ |

ดังนั้น $x \oplus x = x$

2. พิสูจน์ทำนองเดียวกับข้อ 1 ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

3. <u>พิสูจน์</u>

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x \otimes b$ | $=$ | $b \oplus (x \otimes b)$ | $(b \oplus x = x)$ |
| | $=$ | $(x \otimes \sim x) \oplus (x \otimes b)$ | $(b = x \otimes \sim x)$ |
| | $=$ | $x \otimes (\sim x \oplus b)$ | $((x \otimes y) \oplus (x \otimes z) = x \otimes (y \oplus z))$ |
| | $=$ | $x \otimes \sim x$ | $(x \oplus b = x)$ |
| | $=$ | $b$ | $(x \otimes \sim x = b)$ |

ดังนั้น $x \otimes b = b$

4. พิสูจน์ทำนองเดียวกับข้อ 3 ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

5. <u>พิสูจน์</u> $x \oplus (x \otimes y) = (x \otimes a) \oplus (x \otimes y)$ $(x = x \otimes a)$

$= x \otimes (a \oplus y)$

$((x \otimes y) \oplus (x \otimes z) = x \otimes (y \oplus z))$

$= x \otimes a$ $(a \oplus x = a)$

$= x$ $(x \otimes a = x)$

ดังนั้น $x \oplus (x \otimes y) = x$

6. พิสูจน์ทำนองเดียวกับข้อ 5 ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

7. <u>พิสูจน์</u> $(x \otimes y) \oplus \sim[(x \oplus \sim y) \otimes y] = (x \otimes y) \oplus [\sim(x \oplus \sim y) \oplus \sim y]$

$= (x \otimes y) \oplus [(\sim x \otimes y) \oplus \sim y]$

$= (x \otimes y) \oplus [(\sim x \oplus \sim y) \otimes (y \oplus \sim y)]$

$= (x \otimes y) \oplus [(\sim x \oplus \sim y) \otimes a]$

$= (x \otimes y) \oplus (\sim x \oplus \sim y)$

$= (x \otimes y) \oplus \sim(x \otimes y)$

$= a$

ดังนั้น $(x \otimes y) \oplus \sim[(x \oplus \sim y) \otimes y] = a$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

# แบบฝึกหัดที่ 6

ให้นักเรียนพิสูจน์สมบัติในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้บทนิยามที่ได้พิสูจน์มาแล้ว

1. $x \otimes (x \otimes y) = x \otimes y$
2. $x \otimes (x \oplus y) = x$
3. $x \otimes (\sim x \oplus y) = x \otimes y$
4. $\sim x \oplus (x \otimes y) = \sim x \oplus y$
5. $\sim x \otimes (x \otimes y) = b$
6. $x \oplus (\sim x \otimes y) = x \oplus y$
7. $x \oplus (\sim x \oplus y) = a$
8. $(x \oplus y) \otimes \sim x = \sim x \otimes y$
9. $(x \otimes \sim y) \otimes (x \otimes \sim z) = x \otimes \sim (y \oplus z)$
10. $(x \oplus y) \otimes (\sim x \oplus z) = (\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

# บทที่ 5
# รูปแบบปกติของฟังก์ชันบูลีน

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

เมื่อจบบทเรียนนี้ นักเรียนสามารถเขียนฟังก์ชันบูลีนในรูปแบบปกติ ที่มีตัวแปร 2 – 3 ตัวได้

รูปแบบปกติ เป็นรูปแบบของฟังก์ชันบูลีน ที่อยู่ในรูปผลบวกของผลคูณหรือผลคูณของผลบวก ที่มีตัวแปรในแต่ละเทอมครบทุกตัว ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะฟังก์ชันบูลีนที่มีตัวแปร 2 ตัวและ 3 ตัว เท่านั้น

<u>ตัวอย่าง</u> จงทำฟังก์ชันบูลีนต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปแบบปกติ

1. $(\sim x \otimes y) \oplus x$

เนื่องจากไม่มี y ในเทอม x สามารถเขียนฟังก์ชันใหม่ของ $(\sim x \otimes y) \oplus x$ ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
(\sim x \otimes y) \oplus x &= (\sim x \otimes y) \oplus x \otimes a \\
&= (\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes (y \oplus \sim y)) \\
&= (\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes y) \oplus (x \otimes \sim y)
\end{aligned}
$$

2. $(\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes \sim y \otimes z)$

เนื่องจากไม่มี z ในเทอม $(\sim x \otimes y)$ สามารถเขียนฟังก์ชันใหม่ของ $(\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes \sim y \otimes z)$ ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
(\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes \sim y \otimes z) &= (\sim x \otimes y \otimes a) \oplus (x \otimes \sim y \otimes z) \\
&= (\sim x \otimes y \otimes (z \oplus \sim z)) \oplus (x \otimes \sim y \otimes z) \\
&= (\sim x \otimes y \otimes z) \oplus (\sim x \otimes y \otimes \sim z) \oplus (x \otimes \sim y \otimes z)
\end{aligned}
$$

3. $(x \oplus \sim y) \otimes \sim x$

เนื่องจากไม่มี y ในเทอม ~x เราสามารถเขียนฟังก์ชันใหม่ของ $(x \oplus \sim y) \otimes \sim x$ ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
(x \oplus \sim y) \otimes \sim x &= (x \oplus \sim y) \otimes (\sim x \oplus a) \\
&= (x \oplus \sim y) \otimes [\sim x \oplus (y \otimes \sim y)] \\
&= (x \oplus \sim y) \otimes (\sim x \oplus y) \otimes (\sim x \oplus \sim y)
\end{aligned}
$$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

4. $\sim((x \oplus \sim y) \otimes \sim(x \otimes \sim y \otimes z))$

เราต้องเขียนฟังก์ชันให้อยู่ในรูปผลคูณของผลบวกก่อน ดังนี้

$\sim((x \oplus \sim y) \otimes \sim(x \otimes \sim y \otimes z))$

$= \sim(x \oplus \sim y) \oplus (x \otimes \sim y \otimes z)$

$= (\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes \sim y \otimes z)$

$= ((\sim x \otimes y) \oplus x) \otimes ((\sim x \otimes y) \oplus \sim y) \otimes ((\sim x \otimes y) \oplus z)$

$= (\sim x \oplus x) \otimes (y \oplus x) \otimes (\sim x \oplus \sim y) \otimes (y \oplus \sim y) \otimes (\sim x \oplus z) \otimes (y \oplus z)$

$= a \otimes (y \oplus x) \otimes (\sim x \oplus \sim y) \otimes a \otimes (\sim x \oplus z) \otimes (y \oplus z)$

$= (x \oplus y) \otimes (\sim x \oplus \sim y) \otimes (\sim x \oplus z) \otimes (y \oplus z)$

จะได้ $\sim((x \oplus \sim y) \otimes \sim(x \otimes \sim y \otimes z)) = (x \oplus y) \otimes (\sim x \oplus \sim y) \otimes (\sim x \oplus z) \otimes (y \oplus z)$

ซึ่งอยู่ในรูปผลคูณของผลบวกและเขียนให้แต่ละเทอมประกอบด้วยตัวแปรทุกตัวได้ ดังนี้

$\sim((x \oplus \sim y) \otimes \sim(x \otimes \sim y \otimes z))$

$= [(x \oplus y) \oplus b] \otimes [(\sim x \oplus \sim y) \oplus b] \otimes [(\sim x \oplus z) \oplus b] \otimes [(y \oplus z) \oplus b]$

$= [(x \oplus y) \oplus (z \otimes \sim z)] \otimes [(\sim x \oplus \sim y) \oplus (z \otimes \sim z)] \otimes [(\sim x \oplus z) \oplus (y \otimes \sim y)] \otimes [(y \oplus z) \oplus (x \otimes \sim x)]$

$= (x \oplus y \oplus z) \otimes (x \oplus y \oplus \sim z) \otimes (\sim x \oplus \sim y \oplus z) \otimes (\sim x \oplus \sim y \oplus \sim z) \otimes (\sim x \oplus z \oplus y) \otimes (\sim x \oplus z \oplus \sim y) \otimes (y \oplus z \oplus x) \otimes (y \oplus z \oplus \sim x)$

$= (x \oplus y \oplus z) \otimes (x \oplus y \oplus \sim z) \otimes (\sim x \oplus \sim y \oplus z) \otimes (\sim x \oplus \sim y \oplus \sim z) \otimes (\sim x \oplus y \oplus z) \otimes (\sim x \oplus \sim y \oplus z) \otimes (x \oplus y \oplus z) \otimes (\sim x \oplus y \oplus z)$

$= (x \oplus y \oplus z) \otimes (x \oplus y \oplus \sim z) \otimes (\sim x \oplus \sim y \oplus z) \otimes (\sim x \oplus \sim y \oplus \sim z) \otimes (\sim x \oplus y \oplus z)$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

# แบบฝึกหัดที่ 7

1. จงเขียนฟังก์ชันบูลีนในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบปกติที่มีตัวแปร 2 ตัว

   (1) $\sim y$

   (2) $\sim x \oplus \sim y$

   (3) $x \otimes (x \oplus y)$

   (4) $(\sim x \otimes \sim y) \oplus y$

   (5) $x \otimes \sim(x \otimes \sim y)$

2. จงเขียนฟังก์ชันบูลีนในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบปกติที่มีตัวแปร 3 ตัว

   (1) $(x \otimes \sim y) \oplus (\sim x \otimes y)$

   (2) $x \otimes z$

   (3) $x \otimes (\sim y \oplus z)$

   (4) $(x \oplus \sim(\sim x \oplus y)) \otimes (x \oplus \sim(\sim y \otimes \sim z))$

   (5) $(x \oplus y \oplus z) \otimes (\sim x \oplus \sim y)$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

นอกจากนี้ เรายังสามารถหารูปแบบปกติได้จากตาราง โดยพิจารณาค่าของตัวแปรที่ให้ค่า F = a สำหรับฟังก์ชันบูลีนในรูปผลบวกของผลคูณ และพิจารณาค่าของตัวแปรที่ให้ค่า F = b สำหรับฟังก์ชันบูลีนในรูปผลคูณของผลบวก ดังตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง</u> จงทำฟังก์ชันบูลีนต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปแบบปกติ โดยใช้ตาราง

1. $(\sim x \otimes y) \oplus x$

| x | y | ~x | ~y | $\sim x \otimes y$ | $(\sim x \otimes y) \oplus x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| a | a | b | b | b | a |
| a | b | b | a | b | a |
| b | a | a | b | a | a |
| b | b | a | a | b | b |

จากตารางจะเห็นว่า $(\sim x \otimes y) \oplus x$ มีค่าเป็น a เมื่อแต่ละข้อต่อไปนี้ มีค่าเป็น a พร้อมกัน

1. x และ y จะได้ผลคูณ คือ $x \otimes y$
2. x และ ~y จะได้ผลคูณ คือ $x \otimes \sim y$
3. ~x และ y จะได้ผลคูณ คือ $\sim x \otimes y$

จะได้ว่า ฟังก์ชันรูปแบบปกติของ $(\sim x \otimes y) \oplus x$ คือ $(x \otimes y) \oplus (x \otimes \sim y) \oplus (\sim x \otimes y)$

และ จากตารางจะเห็นว่า $(\sim x \otimes y) \oplus x$ มีค่าเป็น b เมื่อ x และ y มีค่าเป็น b พร้อมกัน จะได้ผลบวก คือ $x \oplus y$

จะได้ว่า ฟังก์ชันรูปแบบปกติอีกรูปแบบหนึ่งของ $(\sim x \otimes y) \oplus x$ คือ $x \oplus y$

2. $(\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes \sim y \otimes z)$

| x | y | z | ~x | ~y | ~z | $\sim x \otimes y$ | $x \otimes \sim y \otimes z$ | $(\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes \sim y \otimes z)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | a | a | b | b | b | b | b | b |
| a | a | b | b | b | a | b | b | b |
| a | b | a | b | a | b | b | a | a |
| a | b | b | b | a | a | b | b | b |
| b | a | a | a | b | b | a | b | a |
| b | a | b | a | b | a | a | b | a |
| b | b | a | a | a | b | b | b | b |
| b | b | b | a | a | a | b | b | b |

จากตารางจะเห็นว่า $(\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes \sim y \otimes z)$ มีค่าเป็น a เมื่อแต่ละข้อต่อไปนี้ มีค่าเป็น a พร้อมกัน

1. x, ~y และ z จะได้ผลคูณ คือ $x \otimes \sim y \otimes z$
2. ~x, y และ z จะได้ผลคูณ คือ $\sim x \otimes y \otimes z$
3. ~x, y และ ~z จะได้ผลคูณ คือ $\sim x \otimes y \otimes \sim z$

จะได้ว่า ฟังก์ชันรูปแบบปกติของ $(\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes \sim y \otimes z)$ คือ

$(x \otimes \sim y \otimes z) \oplus (\sim x \otimes y \otimes z) \oplus (\sim x \otimes y \otimes \sim z)$

และ จากตารางจะเห็นว่า $(\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes \sim y \otimes z)$ มีค่าเป็น b เมื่อแต่ละข้อต่อไปนี้ มีค่าเป็น b พร้อมกัน

1. ~x, ~y และ ~z จะได้ผลบวก คือ $\sim x \oplus \sim y \oplus \sim z$
2. ~x, ~y และ z จะได้ผลบวก คือ $\sim x \oplus \sim y \oplus z$
3. ~x, y และ z จะได้ผลบวก คือ $\sim x \oplus y \oplus z$
4. x, y และ ~z จะได้ผลบวก คือ $x \oplus y \oplus \sim z$
5. x, y และ z จะได้ผลบวก คือ $x \oplus y \oplus z$

จะได้ว่า ฟังก์ชันรูปแบบปกติอีกรูปแบบหนึ่งของ $(\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes \sim y \otimes z)$ คือ $(\sim x \oplus \sim y \oplus \sim z) \otimes (\sim x \oplus \sim y \oplus z) \otimes (\sim x \oplus y \oplus z) \otimes (x \oplus y \oplus \sim z) \otimes (x \oplus y \oplus z)$

3. $(x \oplus \sim y) \otimes \sim x$

| x | y | ~x | ~y | $x \oplus \sim y$ | $(x \oplus \sim y) \otimes \sim x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| a | a | b | b | a | b |
| a | b | b | a | a | b |
| b | a | a | b | b | b |
| b | b | a | a | a | a |

จากตารางจะเห็นว่า $(x \oplus \sim y) \otimes \sim x$ มีค่าเป็น a เมื่อ ~x และ ~y มีค่าเป็น a พร้อมกัน จะได้ผลคูณ คือ $\sim x \otimes \sim y$

จะได้ว่า ฟังก์ชันรูปแบบปกติของ $(x \oplus \sim y) \otimes \sim x$ คือ $\sim x \otimes \sim y$

และ จากตารางจะเห็นว่า $(x \oplus \sim y) \otimes \sim x$ มีค่าเป็น b เมื่อแต่ละข้อต่อไปนี้ มีค่าเป็น b พร้อมกัน

1. ~x และ ~y จะได้ผลบวก คือ $\sim x \oplus \sim y$
2. ~x และ y จะได้ผลบวก คือ $\sim x \oplus y$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

3. x และ ~y จะได้ผลบวก คือ $x \oplus \sim y$

จะได้ว่า ฟังก์ชันรูปแบบปกติอีกรูปแบบหนึ่งของ $(x \oplus \sim y) \otimes \sim x$ คือ

$(\sim x \oplus \sim y) \otimes (\sim x \oplus y) \otimes (x \oplus \sim y)$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

# แบบฝึกหัดที่ 8

1. จงหารูปแบบปกติของฟังก์ชันบูลีน จากตารางที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1)

| x | y | F |
|---|---|---|
| a | a | b |
| a | b | a |
| b | a | a |
| b | b | b |

(2)

| x | y | z | F |
|---|---|---|---|
| a | a | a | b |
| a | a | b | a |
| a | b | a | a |
| a | b | b | a |
| b | a | a | b |
| b | a | b | a |
| b | b | a | b |
| b | b | b | a |

2. ให้หารูปแบบปกติของฟังก์ชันที่มีตัวแปร *2* ตัว ในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยการสร้างตาราง

(1) $\sim y$

(2) $\sim x \oplus \sim y$

(3) $x \otimes (x \oplus y)$

(4) $(\sim x \otimes \sim y) \oplus y$

(5) $x \otimes \sim(x \otimes \sim y)$

3. ให้หารูปแบบปกติของฟังก์ชันที่มีตัวแปร *3* ตัว ในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยการสร้างตาราง

(1) $(x \otimes \sim y) \oplus (\sim x \otimes y)$

(2) $x \otimes z$

(3) $x \otimes (\sim y \oplus z)$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

# บทที่ 6
# การลดรูปของฟังก์ชันบูลีน

| |
|---|
| <u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u><br>เมื่อจบบทเรียนนี้ นักเรียนสามารถลดรูปของฟังก์ชันบูลีน โดยวิธีทางพีชคณิตบูลีนหรือแผนผังคาร์โนห์ได้ |

การลดรูปของฟังก์ชันบูลีนทำให้ฟังก์ชันมีความซับซ้อนน้อยลง แต่ให้ความหมายเหมือนเดิม การลดรูปฟังก์ชันนั้นทำได้หลายวิธี แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีที่สำคัญ 2 วิธี คือ

1. **วิธีทางพีชคณิตบูลีน** (Boolean Algebra Equation) คือ การใช้สมบัติทางพีชคณิตบูลีนมาดำเนินการกับฟังก์ชันนั้น

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ลดรูปฟังก์ชันบูลีนต่อไปนี้

1. $(x \otimes y) \oplus \sim((x \oplus \sim y) \otimes y)$

<u>วิธีทำ</u> $(x \otimes y) \oplus \sim((x \oplus \sim y) \otimes y)$

$= (x \otimes y) \oplus (\sim(x \oplus \sim y) \oplus \sim y)$
$= (x \otimes y) \oplus ((\sim x \otimes y) \oplus \sim y)$
$= (x \otimes y) \oplus ((\sim x \oplus \sim y) \otimes (y \oplus \sim y))$
$= (x \otimes y) \oplus ((\sim x \oplus \sim y) \otimes a)$
$= (x \otimes y) \oplus (\sim x \oplus \sim y)$
$= (x \otimes y) \oplus \sim(x \otimes y) \quad = a$

2. $(\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes y) \oplus (x \otimes \sim y)$

<u>วิธีทำ</u> $(\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes y) \oplus (x \otimes \sim y) = (\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes (y \oplus \sim y))$

$= (\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes a)$
$= (\sim x \otimes y) \oplus x$
$= (\sim x \oplus x) \otimes (y \oplus x)$
$= a \otimes (y \oplus x)$
$= y \oplus x$
$= x \oplus y$

3. $(x \oplus y) \otimes (x \oplus z) \otimes x$

<u>วิธีทำ</u> $(x \oplus y) \otimes (x \oplus z) \otimes x$

$= (((x \oplus y) \otimes x) \oplus ((x \oplus y) \otimes z)) \otimes x$
$= (x \oplus ((x \oplus y) \otimes z)) \otimes x$
$= x \otimes (x \oplus ((x \oplus y) \otimes z)) = x$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

## แบบฝึกหัดที่ 9

1. ให้นักเรียนลดรูปของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้วิธีทางพีชคณิตบูลีน
   (1) $x \otimes (\sim x \oplus y)$
   (2) $(x \oplus y) \otimes (x \oplus \sim y)$
   (3) $(x \oplus \sim y) \otimes (\sim x \oplus y) \otimes (\sim x \oplus \sim y)$
   (4) $(x \otimes y \otimes z) \oplus \sim x \oplus \sim y \oplus \sim z$
   (5) $(x \oplus (\sim x \otimes y)) \otimes (y \oplus (y \otimes z))$

มหาวิทยาลัยบูรพา
Burapha University

**2. วิธีใช้แผนผังคาร์โนห์** (Karnaugh Map)

Karnaugh Map หรือเรียกย่อ ๆ ว่า K-map เป็นวิธีการทางกราฟหรือทางรูปภาพ (Graphical or pictorial technique) ซึ่งใช้สำหรับการลดรูปฟังก์ชันบูลีนในรูปแบบปกติ โดยเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกของผลคูณ หรืออยู่ในรูปผลคูณของผลบวกก็ได้

ลักษณะของแผนผังคาร์โนห์มีลักษณะเป็นตารางสี่เหลี่ยมที่มีจำนวนช่องของตารางแปรผันตามจำนวนของตัวแปร เช่น ถ้ามีตัวแปร 2 ตัว ก็จะมีช่องของตาราง 4 ช่อง ($2^2 = 4$) ถ้ามีตัวแปร 3 ตัว ก็จะมี 8 ช่อง ($2^3 = 8$) หรือถ้ามีตัวแปร 4 ตัว ก็จะมี 16 ช่อง ($2^4 = 16$) การลดรูปฟังก์ชัน โดยใช้แผนผังคาร์โนห์สามารถลดรูปฟังก์ชันที่มีตัวแปร 2, 3, 4, 5 หรือ 6 ตัวแปร โดยทั่วไปมักจะใช้ลดรูปฟังก์ชันที่มีตัวแปรไม่เกิน 4 ตัว ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะฟังก์ชันที่มีตัวแปร 2 ตัวและ 3 ตัวเท่านั้น

K-map แบบที่มีตัวแปร 2 ตัว คือ x และ y เป็นดังนี้

| | ~y | y |
|---|---|---|
| ~x | | |
| x | | |

K-map แบบที่มีตัวแปร 3 ตัว คือ x, y และ z เป็นดังนี้

| | ~y ~z | y ~z | y z | ~y z |
|---|---|---|---|---|
| ~x | | | | |
| x | | | | |

ขั้นตอนการลดรูปฟังก์ชันโดยใช้แผนผังคาร์โนห์

การลดรูปฟังก์ชัน โดยใช้แผนผังคาร์โนห์มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ในกรณีเป็นฟังก์ชันอยู่ในรูปผลบวกของผลคูณ ให้ใส่ “1” ลงในช่องของแผนผังคาร์โนห์ตามค่าของตัวแปรในแต่ละเทอมของฟังก์ชัน
2. ในกรณีเป็นฟังก์ชันอยู่ในรูปผลคูณของผลบวก ให้ใส่ “0” ลงในช่องของแผนผังคาร์โนห์ตามค่าของตัวแปรในแต่ละเทอมของฟังก์ชัน
3. จับคู่และวงรอบตัวแปรที่เป็น “1” หรือ “0” ที่อยู่ติดกัน โดยมีหลักเกณฑ์ที่ว่า จับคู่ได้ครั้งละ 16 ตัว หรือ 8 ตัว หรือ 4 ตัว หรือ 2 ตัว ตามลำดับ และถ้าวงรอบได้ 8 ตัว ก็ไม่ต้องวงรอบ 4 ตัว 2 ครั้ง เพราะจะทำให้ฟังก์ชันที่ได้จะไม่ใช่ฟังก์ชันที่เหลือตัวแปรน้อยที่สุด
4. ช่องที่ถูกวงรอบไปแล้ว สามารถนำไปจับคู่เพื่อวงรอบร่วมกับตัวอื่นได้อีกถ้าจำเป็น

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

5. เมื่อวงรอบได้แล้วให้พิจารณาว่าจะได้ตัวแปรอะไรสำหรับวงนั้น โดยถือหลักว่าถ้าตัวแปรมีการเปลี่ยนแปลงให้ตัดตัวแปรนั้นทิ้งไป
6. ผลลัพธ์สุดท้ายได้จากการนำตัวแปรที่เหลืออยู่ของแต่ละวงรอบมาบวกกัน สำหรับฟังก์ชันอยู่ในรูปผลบวกของผลคูณ หรือคูณกัน สำหรับฟังก์ชันอยู่ในรูปผลคูณของผลบวก

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ลดรูปของฟังก์ชันบูลีนต่อไปนี้ โดยใช้ K-map

1. $F = (\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes y) \oplus (x \otimes \sim y)$

จาก K-map แบบที่มีตัวแปร 2 ตัว ให้ใส่เลข 1 ลงในช่องของเทอมที่กำหนด

| | ~y | y |
|---|---|---|
| ~x | | 1 |
| x | 1 | 1 |

จับคู่ตามแนวตั้งและแนวนอน ได้ดังนี้

| | ~y | y |
|---|---|---|
| ~x | | 1 |
| x | 1 | 1 |

จะเห็นว่า ตัวแปรตามแนวตั้ง $(\sim x \otimes y) \oplus (x \otimes y)$ เปลี่ยนจาก ~x เป็น x จึงตัด ~x และ x ออก

ตัวแปรตามแนวนอน $(x \otimes \sim y) \oplus (x \otimes y)$ เปลี่ยนจาก ~y เป็น y จึงตัด ~y และ y ออก

จะได้ $F = x \oplus y$

2. $F = (\sim x \otimes \sim y \otimes \sim z) \oplus (\sim x \otimes y \otimes \sim z)$

จาก K-map แบบที่มีตัวแปร 3 ตัว ให้ใส่เลข 1 ลงในช่องของเทอมที่กำหนด

| | ~y ~z | y ~z | ~y z | yz |
|---|---|---|---|---|
| ~x | 1 | 1 | | |
| x | | | | |

จับคู่ตามแนวนอน ได้ดังนี้

| | ~y ~z | y ~z | ~y z | yz |
|---|---|---|---|---|
| ~x | 1 | 1 | | |
| x | | | | |

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

จะเห็นว่าตัวแปรตามแนวนอน $(\sim x \otimes \sim y \otimes \sim z) \oplus (\sim x \otimes y \otimes \sim z)$ เปลี่ยนจาก ~y เป็น y จึงตัด ~y และ y ออก จะได้ $F = (\sim x \otimes \sim z) \oplus (\sim x \otimes \sim z) = (\sim x \otimes \sim z)$

3. $F = (\sim x \otimes y \otimes z) \oplus (x \otimes y \otimes z)$

จาก K-map แบบที่มีตัวแปร 3 ตัว ให้ใส่เลข 1 ลงในช่องของเทอมที่กำหนด

| | ~y ~z | y ~z | ~y z | yz |
|---|---|---|---|---|
| ~x | | | | 1 |
| x | | | | 1 |

จับคู่ตามแนวตั้ง ได้ดังนี้

| | ~y ~z | y ~z | ~y z | yz |
|---|---|---|---|---|
| ~x | | | | 1 |
| x | | | | 1 |

จะเห็นว่า ตัวแปรตามแนวตั้ง $(\sim x \otimes y \otimes z) \oplus (x \otimes y \otimes z)$ เปลี่ยนจาก ~x เป็น x จึงตัด ~x และ x ออก จะได้ $F = (y \otimes z) \oplus (y \otimes z) = (y \otimes z)$

4. $F = (\sim x \otimes y \otimes \sim z) \oplus (x \otimes y \otimes \sim z) \oplus (x \otimes y \otimes z)$

จาก K-map แบบที่มีตัวแปร 3 ตัว ให้ใส่เลข 1 ลงในช่องของเทอมที่กำหนด

| | ~y ~z | y ~z | ~y z | yz |
|---|---|---|---|---|
| ~x | | 1 | | |
| x | | 1 | | 1 |

จับคู่ตามแนวตั้งและแนวนอน ได้ดังนี้

| | ~y ~z | y ~z | ~y z | yz |
|---|---|---|---|---|
| ~x | | 1 | | |
| x | | 1 | | 1 |

จะเห็นว่า ตัวแปรตามแนวตั้ง $(\sim x \otimes y \otimes \sim z) \oplus (x \otimes y \otimes \sim z)$ เปลี่ยนจาก ~x เป็น x จึงตัด ~x และ x ออก เหลือ $y \otimes \sim z$

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University

ตัวแปรตามแนวนอน $(x \otimes y \otimes {\sim}z) \oplus (x \otimes y \otimes z)$ เปลี่ยนจาก ~z เป็น z จึงตัด ~z และ z ออก เหลือ $x \otimes y$

จะได้ $F = (x \otimes y) \oplus (y \otimes {\sim}z) = (y \otimes x) \oplus (y \otimes {\sim}z) = y \otimes (x \oplus {\sim}z)$

5. $F = (x \oplus {\sim}y) \otimes ({\sim}x \oplus y) \otimes ({\sim}x \oplus {\sim}y)$

จาก K-map แบบที่มีตัวแปร 2 ตัว ให้ใส่เลข 0 ลงในช่องของเทอมที่กำหนด

| | ~y | y |
|---|---|---|
| ~x | 0 | 0 |
| x | 0 | |

จับคู่ตามแนวตั้งและแนวนอน ได้ดังนี้

| | ~y | y |
|---|---|---|
| ~x | 0 | 0 |
| x | 0 | |

จะเห็นว่า ตัวแปรตามแนวตั้ง $({\sim}x \oplus {\sim}y) \otimes (x \oplus {\sim}y)$ เปลี่ยนจาก ~x เป็น x จึงตัด ~x และ x ออก

ตัวแปรตามแนวนอน $({\sim}x \oplus {\sim}y) \otimes ({\sim}x \oplus y)$ เปลี่ยนจาก ~y เป็น y จึงตัด ~y และ y ออก

จะได้ $F = {\sim}x \otimes {\sim}y$

6. $F = (x \oplus y \oplus z) \otimes (x \oplus {\sim}y \oplus {\sim}z) \otimes ({\sim}x \oplus y \oplus z) \otimes ({\sim}x \oplus y \oplus {\sim}z) \otimes ({\sim}x \oplus {\sim}y \oplus z) \otimes$
$({\sim}x \oplus {\sim}y \oplus {\sim}z)$

จาก K-map แบบที่มีตัวแปร 3 ตัว ให้ใส่เลข 0 ลงในช่องของเทอมที่กำหนด

| | ~y ~z | y ~z | ~y z | yz |
|---|---|---|---|---|
| ~x | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x | 0 | | | 0 |

จับคู่ตามแนวตั้งและแนวนอน ได้ดังนี้

| | ~y ~z | y ~z | ~y z | yz |
|---|---|---|---|---|
| ~x | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x | 0 | | | 0 |

มหาวิทยาลัยบูรพา Burapha University