บทที่ 5
อภิปรายและสรุปผล

จากการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น ที่มีรูปแบบของสมการเฉพาะ คือ สมการซิเบอร์-ชาแบท ซึ่งมุ่งเน้นการหาผลเฉลยโดยใช้วิธี ไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่มีรูปแบบทั่วไป และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับสมการที่มีค่าของสัมประสิทธิ์เฉพาะแยกตามกรณี ทำให้เราได้ผลเฉลยในรูปแบบต่าง ๆ สามารถสรุปผลการวิเคราะห์ได้ ดังนี้

อภิปรายและสรุปผลการวิเคราะห์

1. การหาผลเฉลยโดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์

จากวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์นั้นนับว่าเป็นวิธีที่ไม่ซับซ้อนในการคำนวณหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ทั้งยังได้ผลเฉลยที่แน่นอน เริ่มต้นการเลือกตัวแปรอิสระใหม่ วิธีนี้เราจะกำหนดเพียงแบบเดียวเท่านั้น อีกทั้งเมื่อหาผลเฉลยได้แล้วเราสามารถแทนค่าของพารามิเตอร์ต่าง ๆ ลงในรูปแบบของคำตอบได้อย่างชัดเจน ซึ่งวิธีอื่นบางวิธีนั้นอาจจะต้องเลือกตัวแปรอิสระใหม่หลายกรณี และเมื่อได้คำตอบแล้วจะต้องกำหนดค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ใหม่อีกครั้งด้วย ดังนั้นวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ นับว่าเป็นวิธีที่สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2. ผลเฉลยของสมการซิเบอร์-ชาแบท

โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ เราสามารถหาผลเฉลยของสมการซิเบอร์-ชาแบท ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$u_{xt} + p\mathrm{e}^{u} + q\mathrm{e}^{-u} + r\mathrm{e}^{-2u} = 0$$

เมื่อ x,t เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม และ p,q และ r เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ โดยกำหนดให้ $p=q=r=1$ จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t) = \ln\left\{-\frac{1}{6}\alpha + \frac{2}{\alpha} + \frac{\gamma^2 - 18\gamma\alpha + 36\alpha^2}{72\alpha^2}\operatorname{sech}^2\left[\mu(x-ct)\right]\right\},\ c<0$$

โดย $\mu = \frac{1}{12\alpha}\sqrt{-\frac{\gamma^2 - 18\gamma\alpha + 36\alpha^2}{c}}$

และ

$$u(x,t) = \left\{-\frac{1}{6}\alpha + \frac{2}{\alpha} - \frac{\gamma^2 - 18\gamma\alpha + 36\alpha^2}{72\alpha^2}\sec^2\left[\bar{\mu}(x-ct)\right]\right\}, \quad c > 0$$

เมื่อ $\bar{\mu} = \frac{1}{12\alpha}\sqrt{\frac{\gamma^2 - 18\gamma\alpha + 36\alpha^2}{c}}$

2.1 สมการหลุยวิว (The Liouville equation)

สำหรับค่าพารามิเตอร์ $q = r = 0$ ในสมการซิเบอร์-ชาแบทโดยตัวแปรคลื่น $\xi = x\text{-}ct$ จะได้เป็นสมการหลุยวิว ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$u_{xt} + pe^{u} = 0$$

เมื่อ x,t เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม และ p เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ
โดยกำหนดให้ $p = 1$ จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t) = \ln\left\{-2c\mu^2 \operatorname{sech}^2\left[\mu(x-ct)\right]\right\}, \quad \mu > 0, c < 0$$

2.2 สมการไฮเพอร์โบลิกไซน์-กอร์ดอน (The sinh-Gordon equation)

สำหรับค่าพารามิเตอร์ $r = 0$ ในสมการซิเบอร์-ชาแบท โดยตัวแปรคลื่น $\xi = x\text{-}ct$ จะได้เป็นสมการไฮเพอร์โบลิกไซน์-กอร์ดอน ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$u_{xt} + pe^{u} + qe^{-u} = 0$$

เมื่อ x,t เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม และ p,q เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ
โดยกำหนดให้ $q = -1$ และ $p = 1$ จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t) = \ln\left\{1 - \sec h^2\left[\frac{1}{\sqrt{2c}}(x-ct)\right]\right\}, \ c > 0$$

2.3 สมการดอด-บูลลอจ-มิคฮาลอฟ (The Dodd-Bullough-Mikhailov equation)

สำหรับค่าพารามิเตอร์ $q = 0$ ในสมการซิเบอร์-ชาแบท โดยตัวแปรคลื่น $\xi = x\text{-}ct$ จะได้เป็นสมการดอด-บูลลอจ-มิคฮาลอฟ ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$u_{xt} + pe^{u} + re^{-2u} = 0$$

เมื่อ x,t เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม และ p,r เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ โดยกำหนดให้ $p = 1$ และ $r = 1$ จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t) = \ln\left\{-1 - \frac{3}{2}\sec h^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{c}}(x-ct)\right]\right\}, c < 0$$

ข้อเสนอแนะ

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยทำการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นที่มีรูปแบบเฉพาะ คือ สมการซิเบอร์-ชาแบท และสมการอื่นที่เกี่ยวข้อง เช่น สมการหลุยวิว สมการไฮเพอร์โบลิกไซน์-กอร์ดอน และสมการดอด-บูลลอจ-มิคฮาลอฟ โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ แต่โดยทั่วไปยังมีปัญหาที่มีรูปแบบเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นในลักษณะอื่น ๆ ที่ยังไม่ถูกพิจารณาเพื่อหาผลเฉลยที่มีรูปแบบทั่วไป ซึ่งเป็นพื้นฐานในการนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่มีรูปแบบเฉพาะอื่น ๆ ต่อไป