


ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน
ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ชมพูนุท รุ่งสว่าง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาดำเนินการตามหลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต
สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์
คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
พฤษภาคม 2558
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยบูรพา


คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์และคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ได้พิจารณา
วิทยานิพนธ์ของ ชมพูนุท รุ่งสว่าง ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยบูรพาได้


คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์


..... อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก
(ดร.พรรณทิพา พรหมรักษ์)

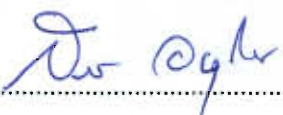

..... อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม
(รองศาสตราจารย์ ดร.เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์


..... ประธาน
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มารุต พิฒผล)


..... กรรมการ
(ดร.พรรณทิพา พรหมรักษ์)


..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร)


..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรีพร อนุศาสนนันท์)

คณะศึกษาศาสตร์อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยบูรพา


..... คณบดีคณะศึกษาศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.วิชิต สุรัตน์เรืองชัย)

วันที่ 19 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2558

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้เป็นอย่างดีด้วยความอนุเคราะห์จาก ดร.พรรมทิพา พรหมรักษ์ อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก และรองศาสตราจารย์ ดร.เวชฤทธิ์ อังคนะภัทรจร อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ที่ได้เสียสละเวลาอันมีค่าเพื่อให้คำปรึกษาแนะนำแนวทางที่ถูกต้อง ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่งตลอดมา ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาและความเป็นแบบอย่างของครูที่ดีของท่านเป็นอย่างยิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มารุต พัฒนาผล และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุริพร อนุศาสนนันท์ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาให้ความรู้ ให้คำปรึกษา ตรวจสอบแก้ไขและวิจารณ์ผลงานทำให้งานวิจัยมีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น อีกทั้งความเมตตาจาก ดร.สุณิสา สุมิตรณะ ดร.สมคิด อินเทพ ครูกาญจนา ต.ไชยสุวรรณ ครูกิตติยา เข็นไรสง และครูวิมล วัชรานต์ ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือ ตลอดจนให้คำแนะนำแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยให้มีคุณภาพ อีกทั้งได้รับความอนุเคราะห์จากผู้อำนวยการ กมนพรรธน์ ทิพย์ไกรสร โสคติ ผู้อำนวยการโรงเรียนชลกันยานุกูล เพื่อนครูและนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/6 และ 5/7 ปีการศึกษา 2557 ที่ให้ความร่วมมือในการเก็บข้อมูลเป็นอย่างดี จึงทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้อย่างดี และขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ที่สนับสนุนทุนการศึกษาตลอดหลักสูตรและทุนการศึกษาในการทำวิจัยแก่นิสิต โครงการส่งเสริมการผลิตครูที่มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ (สควค.) ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อวัลลภ รุ่งสว่าง และคุณแม่เฮียง รุ่งสว่าง และญาติ ๆ ที่ให้กำลังใจและสนับสนุนผู้วิจัยเสมอมา ขอขอบคุณพี่ ๆ เพื่อน ๆ และน้อง ๆ ทั้งสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์และสาขาการสอนวิทยาศาสตร์ คณะครู โรงเรียนชลกันยานุกูล ที่เป็นผู้ร่วมคิด คอยให้กำลังใจและคำปรึกษาที่ดีเสมอมา

คุณค่าและประโยชน์ของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอบเป็นกตัญญูกตเวที แต่บุพการี บुरพจารย์ กัลยาณมิตร ผู้มีพระคุณทุกท่านทั้งในอดีตและปัจจุบัน ที่ทำให้ข้าพเจ้าเป็นผู้มีการศึกษาและประสบความสำเร็จมาตราบนานเท่านานนี้

ชมพูนุท รุ่งสว่าง

56910175: สาขาวิชา: การสอนคณิตศาสตร์; กศ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์)

คำสำคัญ: การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน/ ความสามารถในการแก้ปัญหามathematics/ ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ชมนพูนทุ รุ่งสว่าง: ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหามathematicsและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง

การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 (THE EFFECTS OF INQUIRY INSTRUCTIONAL MODEL ON MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING AND REASONING ABILITY IN APPLICATION OF TRIGONOMETRIC FUNCTION OF MATHAYOMSUKSA 5 STUDENTS) คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์:

พรรณทิพา พรหมรักษ์, ก.ค., เวชฤทธิ์ อังคะภัทรขจร, กศ.ค. 221 หน้า. ปี พ.ศ. 2558.

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ 1) เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหามathematics เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนกับเกณฑ์ ที่ร้อยละ 70

2) เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนกับเกณฑ์ ที่ร้อยละ 70

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนชลกันยานุกูล อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 จำนวน 50 คน ได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster random sampling)

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้คือ การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย

- 1) แผนการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน จำนวน 6 แผน ใช้เวลา 12 คาบ
- 2) แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหามathematics ซึ่งมีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.86 และ
- 3) แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีค่าความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.76

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (\bar{X}) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S)

การทดสอบที (t-test) แบบ One sample และใช้การวิเคราะห์เนื้อหา

ผลการวิจัยพบว่า

1. นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน มีความสามารถในการแก้ปัญหามathematics เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สูงกว่าเกณฑ์ ที่ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สูงกว่าเกณฑ์ ที่ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

56910175: MAJOR: MATHEMATICS TEACHING; M.Ed.

(MATHEMATICS TEACHING)

KEYWORDS: INQUIRY INSTRUCTIONAL MODEL/ MATHEMATICAL PROBLEM

SOLVING ABILITY/ MATHEMATICAL REASONING ABILITY

CHOMPOONUT RUNGSAWANG: THE EFFECTS OF INQUIRY

INSTRUCTIONAL MODEL ON MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING AND

REASONING ABILITY IN APPLICATION OF TRIGONOMETRIC FUNCTION OF

MATHAYOMSUKSA 5 STUDENTS. ADVISORY COMMITTEE: PANTIPA PROMARAK,

Ph.D., VETCHARIT ANGGANAPATTARAKAJORN, Ed.D. 221 P. 2015.

The purposes of this research were: 1) to compare Mathayomsuksa 5 students' mathematical problem solving ability in application of trigonometric function following inquiry teaching instructional model with criterion of 70% ; 2) to compare Mathayomsuksa 5 students' mathematical reasoning ability in application of trigonometric function following inquiry teaching instructional model with criterion of 70%.

The participants used for this research was 50 first semester Mathayomsuksa 5 students of the 2014 academic year at Chonkanyanukoon School, Chonburi. They were randomly selected using cluster random sampling. The lesson used in this research was the application of trigonometric function. The research instruments were: 1) six lesson plans of inquiry instructional model implemented for 12 periods; 2) mathematical problem solving ability test with the reliability of 0.86, and 3) mathematical reasoning ability test with the reliability of 0.76. The statistics used for analyzing the collected data were mean, standard deviation, t-test for one sample, and content analysis.

Research results found that:

1. Mathayomsuksa 5 students' mathematical problem solving ability, after following the inquiry teaching instructional model, was higher than the criterion of 70% at .05 level of significance.

2. Mathayomsuksa 5 students' mathematical reasoning ability, after following the inquiry teaching instructional model, was higher than the criterion of 70% at .05 level of significance.

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
สารบัญ.....	ฉ
สารบัญตาราง.....	ช
สารบัญภาพ.....	ฉ
บทที่	
1 บทนำ.....	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	6
สมมติฐานของการวิจัย.....	6
กรอบแนวคิดในการวิจัย.....	7
ขอบเขตของการวิจัย.....	8
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	9
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับการวิจัย.....	10
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	11
หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์.....	12
หลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนชลกันยานุกูล สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์.....	17
การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์.....	21
รูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน.....	30
ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์.....	50
ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	69
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	81

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	83
ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง.....	83
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	84
การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	84
การดำเนินการวิจัย.....	104
การเก็บรวบรวมข้อมูล.....	104
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	105
สถิติที่ใช้ในการวิจัย.....	106
4 ผลการวิจัย.....	110
สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	110
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	110
ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	
เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ.....	111
ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	
เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ.....	121
5 สรุปและอภิปรายผล.....	129
สรุปผลการวิจัย.....	129
อภิปรายผล.....	130
ข้อเสนอแนะ.....	134
บรรณานุกรม.....	136
ภาคผนวก.....	141
ภาคผนวก ก.....	142
ภาคผนวก ข.....	152
ภาคผนวก ค.....	206
ภาคผนวก ง.....	213
ภาคผนวก จ.....	215
ประวัติย่อของผู้วิจัย.....	221

สารบัญญัตราง

ตารางที่	หน้า
2-1 แสดงผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 32202 (คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3).....	18
2-2 ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 32201 (คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3) ที่ใช้ในการวิจัย.....	21
2-3 การสังเคราะห์ขั้นการสอนของรูปแบบการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน.....	41
2-4 เกณฑ์การให้คะแนนตามขั้นตอนการแก้ปัญหา ของ สิริพร ทิพย์คง.....	61
2-5 เกณฑ์การให้คะแนนผลการทำข้อสอบแบบอัตนัยที่พิจารณาจากการแสดงวิธีทำ ในการหาคำตอบ และความถูกต้องของคำตอบ ของ กรมวิชาการ.....	62
2-6 เกณฑ์การให้คะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกรมวิชาการ.....	62
2-7 เกณฑ์การประเมินผลแบบวิเคราะห์ของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.....	63
2-8 การให้คะแนน โดยใช้ Analytic scoring scale กระบวนการแก้ปัญหา ของ อัมพร ม้าคนอง.....	64
2-9 เกณฑ์การประเมินผลแบบเกณฑ์รวมของทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของ สสวท.	67
2-10 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยเลือกใช้ในการวิจัย.....	68
2-11 เกณฑ์การให้คะแนนการทำข้อสอบแบบอัตนัย ทักษะการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์ของ กรมวิชาการ.....	77
2-12 เกณฑ์การให้คะแนนทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของ สสวท.	79
2-13 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยเลือกใช้ในการวิจัย.....	80
3-1 แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ.....	85
3-2 การวิเคราะห์ข้อสอบแบบอัตนัยเพื่อวัดความสามารถในการแก้ปัญหา ทางคณิตศาสตร์.....	95
3-3 เกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา ทางคณิตศาสตร์.....	96

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่	หน้า
3-4 การวิเคราะห์ข้อสอบแบบอัตนัยเพื่อวัดความสามารถในการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์.....	100
3-5 เกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์.....	102
3-6 แบบแผนการวิจัยศึกษากลุ่มเดียว วัดหลังการทดลองครั้งเดียว.....	104
4-1 ค่าเฉลี่ย และค่าสถิติทดสอบที ของคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหา ทางคณิตศาสตร์.....	112
4-2 ค่าเฉลี่ย และค่าสถิติทดสอบที ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์.....	122
ค-1 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ที่มีต่อ ความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน.....	207
ค-2 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ การเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน.....	207
ค-3 ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ วัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	208
ค-4 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ การเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน.....	208
ค-5 ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ วัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	209

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่	หน้า
ค-6	
คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	
เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	210

สารบัญญภาพ

ภาพที่	หน้า
1-1 กรอบแนวคิดในการวิจัย.....	7
2-1 กระบวนการแก้ปัญหา DAPIC.....	55
2-2 แสดง 4 ขั้นตอนการคิดของครูฝึกและรูดนิก.....	70
4-1 คะแนนดิบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์รายบุคคล.....	111
4-2 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 2 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นทำความเข้าใจปัญหา.....	115
4-3 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 3 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นทำความเข้าใจปัญหา.....	115
4-4 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 1 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นวางแผนการแก้ปัญหา.....	116
4-5 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 2 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นวางแผนการแก้ปัญหา.....	117
4-6 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 3 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นวางแผนการแก้ปัญหา.....	118
4-7 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 1 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นดำเนินการแก้ปัญหา.....	119
4-8 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 2 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นดำเนินการแก้ปัญหา.....	119
4-9 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 3 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นดำเนินการแก้ปัญหา.....	120
4-10 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 1 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นการสรุปคำตอบ.....	120
4-11 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 2 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นการสรุปคำตอบ.....	121
4-12 คะแนนดิบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์รายบุคคล.....	121
4-13 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 2 ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	125

สารบัญญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
4-14 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 3 ด้านความสามารถในการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์.....	126
4-15 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 4 ด้านความสามารถในการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์.....	127
4-16 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 5 ด้านความสามารถในการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์.....	128

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างเป็นระบบ มีแบบแผน และสามารถวิเคราะห์ปัญหา สถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจและแก้ไขปัญหา ได้อย่างถูกต้องเหมาะสมซึ่งเป็นประโยชน์ในชีวิตประจำวัน นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตมนุษย์ให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกันได้อย่างมีความสุข (กระทรวงศึกษาธิการ, 2552 ก, หน้า 56) จากความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ดังกล่าว หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 จึงได้กำหนดสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ไว้ในหลักสูตรทุกระดับชั้น ตั้งแต่ระดับชั้นประถมศึกษาจนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และจัดให้วิชาคณิตศาสตร์เป็นสาระการเรียนรู้หนึ่งที่สถานศึกษาต้องให้ความสำคัญและใช้เป็นหลักในการจัดการเรียนรู้ เพื่อนำนักเรียนได้นำความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปช่วยพัฒนาการคิดอย่างเป็นระบบ และมีความคิดที่สร้างสรรค์ เพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหา การดำเนินชีวิต และศึกษาต่อในอนาคต (กระทรวงศึกษาธิการ, 2552 ก, หน้า 10)

เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยเหตุและผล กระบวนการคิด การแก้ปัญหา (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี [สสวท.], 2555 ก, หน้า 1) การแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จึงเป็นทักษะที่มีความสำคัญที่นักเรียนควรจะมีฝึกฝน และพัฒนาให้เกิดทักษะขึ้นในตัวนักเรียน เพราะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้เด็กมีแนวคิดที่หลากหลาย มีนิสัยกระตือรือร้นไม่ย่อท้อ มีความมั่นใจในการแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ ตลอดจนเป็นทักษะพื้นฐานที่นักเรียนสามารถนำติดตัวไปใช้ในชีวิตประจำวันได้ตลอดชีวิต (สสวท., 2555 ก, หน้า 6) นอกจากนี้ สิริพร ทิพย์คง (2537, หน้า 97) ยังได้กล่าวไว้ว่า การแก้ปัญหาเป็นหัวใจของวิชาคณิตศาสตร์ โดยมีความเชื่อว่าทักษะในการแก้ปัญหามีความสำคัญต่อชีวิตที่สามารถสร้างให้เกิดขึ้นได้ เพราะการสอนให้นักเรียนรู้จักแก้ปัญหาจะช่วยให้เด็กเรียนรู้จักการตัดสินใจที่ถูกต้องและเป็นนักแก้ปัญหาที่ดี ในขณะที่เดียวกันการให้เหตุผลก็เป็นทักษะที่จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างเป็นระบบ คิดอย่างมีเหตุผล และใช้เหตุผลมาช่วยในการเรียนรู้และแก้ปัญหา การคิดอย่างมีเหตุผล

จึงเป็นเครื่องมือสำคัญ ที่นักเรียนสามารถนำคิดตัวไปใช้พัฒนาตนเองในการเรียนรู้สิ่งใหม่ๆ ในชีวิต ดังนั้นการคิดอย่างมีเหตุผลจึงเป็นหัวใจสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ (สสวท., 2555 ก, หน้า 38-39) ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ รัสเซลล์ (Russell, 1999, p. 1) ที่กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นหัวใจสำคัญของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื่องจากวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะเป็นนามธรรม ซึ่งการให้เหตุผลเป็นเครื่องมือที่จะเข้าใจนามธรรมนั้น โดยการให้เหตุผลเป็นสิ่งที่ใช้คิดเกี่ยวกับสมบัติต่าง ๆ ในทางคณิตศาสตร์ และพัฒนาให้อยู่ในลักษณะของการอ้างอิง เพื่อให้สามารถใช้ข้อเท็จจริงที่เรียนรู้มาอ้างอิงไปยังสิ่งใหม่ จากความสำคัญของการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ดังกล่าว หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 จึงได้กำหนดให้ทักษะการแก้ปัญหาและทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งในสาระทักษะ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2552 ก, หน้า 13)

ถึงแม้ว่าวิชาคณิตศาสตร์จะเป็นวิชาที่มีความสำคัญและเป็นประโยชน์ต่อการดำรงชีวิต (กระทรวงศึกษาธิการ, 2552 ก, หน้า 56) แต่ความสามารถทางวิชาการ โดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนไทยยังไม่ได้มาตรฐาน ซึ่งพิจารณาได้จากผลการสรุปความสามารถในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จากคะแนน O-NET พบว่าคะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์ ตั้งแต่ปี 2551-2556 คือ 41.33, 31.90, 14.99, 22.73, 22.73 และ 20.48 คะแนน ตามลำดับ จากคะแนนเต็ม 100 คะแนน ซึ่งยังไม่เป็นที่น่าพอใจ ด้วยเหตุนี้สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ (องค์การมหาชน) จึงเสนอว่า ควรหาทางสนับสนุนให้เกิดพัฒนาการในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ (สถาบันทดสอบการศึกษาแห่งชาติ องค์การมหาชน [สทศ.], 2556) ทั้งนี้จากการสัมภาษณ์ รศ.ดร.สมพงษ์ จิตระดับ อาจารย์ประจำคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ซึ่งได้วิเคราะห์สาเหตุและไขปมของปัญหาคะแนนโอเน็ตตกต่ำว่า การที่นักเรียนทำคะแนนออกมาแค่ประมาณ 20-30% เป็นเพราะ “ข้อสอบสวนทางหลักสูตร” โดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะของข้อสอบเชิงวิเคราะห์ เป็นเหตุเป็นผลและตรรกะ ซึ่งเป็นทักษะเฉพาะ (ไทยรัฐออนไลน์, 2557) ประกอบกับผลคะแนนการสอบ O-NET ในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนชลกันยานุกูล ปีการศึกษา 2555 พบว่า มาตรฐาน ค.2.2 ม.4-6/1 การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูงโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ เป็นมาตรฐานที่โรงเรียนควรเร่งพัฒนา เนื่องจากคะแนนเฉลี่ยของโรงเรียนต่ำกว่าคะแนนเฉลี่ยระดับประเทศมาก (โรงเรียนชลกันยานุกูล, 2556) จึงเห็นได้ว่าความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียนประสบปัญหา ซึ่งหลักสูตรของโรงเรียนชลกันยานุกูลกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้บรรจุเนื้อหาเรื่อง อัตราส่วน

ตรีโกณมิติ และฟังก์ชันตรีโกณมิติ อยู่ทั้งในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานและเพิ่มเติม เมื่อความรู้พื้นฐานของนักเรียนประสบปัญหา จึงส่งผลกระทบต่อรายวิชาเพิ่มเติมด้วยเช่นกัน กล่าวคือ เนื้อหาเรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เป็นเนื้อหาที่นักเรียนจะต้องใช้ความรู้พื้นฐานเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติมาประกอบการเรียนรู้ ซึ่งหากนักเรียนไม่มีความรู้พื้นฐานที่ถูกต้องหรือดีพอก็จะส่งผลต่อการเรียนรู้ในเรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมด้วยเช่นกัน นอกจากนี้จากการที่ผู้วิจัยได้ไปรวบรวมข้อมูลเบื้องต้นทั้งจากครูผู้สอนกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จากการสัมภาษณ์และตรวจสอบแบบฝึกหัดของนักเรียน โรงเรียนชลกันยานุกูล พบว่าเนื้อหาเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นเนื้อหาหนึ่งที่ประสบปัญหาในการจัดการเรียนการสอนและนักเรียนมีผลการเรียนต่ำ เพราะเนื้อหาเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นเนื้อหาที่มีลักษณะค่อนข้างเป็นนามธรรม มีการใช้สูตรและสัญลักษณ์ค่อนข้างมาก ทำให้นักเรียนเห็นเป็นเรื่องยาก นักเรียนจึงขาดความสนใจในการเรียน (กิตติยา เย็นไธสง, บุญนำ เกษี, กาญจนา ค.ไชยสุวรรณ, สัมภาษณ์, 10 มีนาคม 2557) ประกอบกับการแสดงผลการสอบแบบวัดความถนัดทั่วไป หรือ GAT และแบบวัดความถนัดทางวิชาการ/วิชาชีพ PAT ครั้งที่ 1/2556 จากนายสัมพันธ์ พันธุ์พฤกษ์ ผู้อำนวยการ สทศ. พบว่าผลการสอบความถนัดทั่วไป (GAT1) นักเรียนส่วนใหญ่ทำคะแนนได้น้อย ซึ่งอาจเป็นเพราะข้อสอบเป็นการคิดวิเคราะห์และแก้โจทย์ปัญหา และผลการทดสอบความถนัดทางคณิตศาสตร์ (PAT1) พบว่านักเรียนก็ทำคะแนนได้ต่ำเช่นกัน โดยมีคะแนนเฉลี่ยอยู่ที่ 40.61 คะแนน จากคะแนนเต็ม 300 คะแนน (สทศ., 2557) ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ ศศิธร แม้นสงวน (2555, หน้า 338) ที่ชี้ชัดว่าประเทศไทยกำลังประสบปัญหาที่สำคัญในการจัดการศึกษาที่ทำให้นักเรียน “คิดแก้ปัญหาไม่เป็น” หรือ “ไม่ชอบที่จะคิดวิเคราะห์” นอกจากนี้ สทศ. (2555 ก, หน้า 1) พบว่ามีนักเรียนจำนวนไม่น้อยยังต้องความสามารถเกี่ยวกับการแสดงหรืออ้างอิงเหตุผล ทำให้นักเรียนไม่สามารถนำความรู้คณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันและในการศึกษาต่ออย่างมีประสิทธิภาพ ดังนั้นจะเห็นได้ว่าการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในปัจจุบันยังไม่ประสบความสำเร็จเท่าที่ควร ซึ่งเมื่อพิจารณาถึงสาเหตุของปัญหาดังกล่าว อาจเนื่องมาจากปัจจัยหลายประการ เช่น คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นนามธรรม มีกฎเกณฑ์ที่แน่นอน มีลักษณะโครงสร้างเป็นเหตุเป็นผล สื่อความหมายโดยสัญลักษณ์จึงยากต่อการเรียนรู้และทำความเข้าใจ หรือนักเรียนไม่เห็นประโยชน์ต่อการเรียนคณิตศาสตร์ที่นำไปใช้ในชีวิตประจำวัน และขาดทักษะในการพัฒนาความคิดมาให้เหตุผลของการแก้ปัญหา (ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี, 2542, หน้า 3-8) นอกจากนี้ กระทรวงศึกษาธิการ (2556, หน้า 6) ยังได้เสนอว่า นักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหาได้ตั้งแต่เริ่มเรียนคณิตศาสตร์ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก นักเรียนได้รับคำบอกเล่าว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยากไม่สามารถทำความเข้าใจได้

นักเรียนอ่านโจทย์ปัญหาแล้วไม่เข้าใจ ทำให้ไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ จึงทำให้นักเรียนไม่ชอบเรียนคณิตศาสตร์ และกิตติ พัฒนตระกูลสุข (2546, หน้า 54-58) ยังกล่าวถึงปัญหาในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในประเทศไทยไว้ 3 ประการ ประการแรก สภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาโดยทั่ว ๆ ไปครูมักจะเน้นความจำในเรื่องสูตร บทนิยาม และวิธีการหาคำตอบที่ถูกต้อง โดยสอนให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาด้วยวิธีการแน่นอน วิธีเดียว ประการที่สอง ปัญหาด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ในด้านการแก้โจทย์ปัญหา ครูมักจะให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหา โดยนำเอาสูตร และบทนิยามที่ท่องจำไว้มาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งลักษณะของโจทย์ปัญหาเป็นการฝึกใช้สูตรและฝึกทำตามขั้นตอนที่ครูสอนไว้ มากกว่าการฝึกกระบวนการคิด และแก้โจทย์ปัญหา ด้านการให้เหตุผลและพิสูจน์ครุ้มักใช้วิธีอธิบายและแสดงเหตุผลในขั้นตอนต่าง ๆ แล้วครูเขียนสิ่งที่อธิบายทั้งหมดให้นักเรียนดูบนกระดาน สิ่งนี้นักเรียนได้จะเป็นความรู้และความจำเท่านั้น ประการที่สาม ในด้านคุณลักษณะของนักคณิตศาสตร์ ครูขาดการปลูกฝังให้นักเรียนเป็นคนที่มีจิตสำนึก รู้จักสำรวจ การตั้งข้อคาดการณ์พร้อมทั้งให้เหตุผลและพิสูจน์สิ่งต่าง ๆ ด้วยตนเอง ซึ่งสมวงษ์ แปลงประสพโชค (2545, หน้า 3) ได้เสนอว่า การสอนคณิตศาสตร์จำเป็นต้องพัฒนาและปรับเปลี่ยน เพื่อพัฒนานักเรียนให้เป็นผู้มีความรู้ ความสามารถและทักษะทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะความสามารถทางกระบวนการคิดการให้เหตุผล และการแก้โจทย์ปัญหา และยุพิน พิพิธกุล (2541, หน้า 62) ได้เสนอว่า วิธีการสอนของครูจะเป็นเครื่องช่วยทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจ ในเนื้อหาบทเรียนมากขึ้น วิธีการสอนคณิตศาสตร์มีหลายวิธี แต่ไม่มีวิธีการใดที่ดีที่สุด ผู้สอนจะต้องเลือกให้เหมาะสมกับเนื้อหา ระยะเวลา และข้อสำคัญจะอย่างไรให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้และสามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี (2542, หน้า 7-8) ที่กล่าวว่า ครูผู้สอนมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องคำนึงถึงเทคนิคและวิธีการเรียนการสอนต่าง ๆ โดยเลือกวิธีการสอนให้เหมาะสมกับเนื้อหา มีการเน้นที่ตัวนักเรียนเป็นสำคัญและตระหนักถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล

รูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เป็นการจัดการเรียนรู้ที่สามารถพัฒนานักเรียนให้พัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาด้วยวิธีการฝึกให้นักเรียนรู้จักค้นคว้าหาความรู้โดยผู้สอนมีบทบาทในการตั้งคำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้ใช้กระบวนการทางความคิด หาเหตุผลจนค้นพบความรู้หรือแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาที่ถูกต้องด้วยตนเอง แล้วสรุปออกมาเป็นหลักการหรือวิธีการในการแก้โจทย์ปัญหาและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ประโยชน์ได้ (วิณา ประชากุล และประสาท เนิ่งเฉลิม, 2553, หน้า 228) การสอนแบบสืบสวนสอบสวน เป็นที่รู้จักกันหลายชื่อ เช่น การสอนแบบสืบสวนสอบสวน การสอนแบบสอบสวน วิธีสืบเสาะหาความรู้ เป็นต้น (พิมพ์พันธ์ เดชะคุปต์,

2544, หน้า 56) โดยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน มีขั้นตอน 5 ขั้นตอนดังนี้ 1) ขั้นเตรียมความพร้อม หมายถึง ขั้นการเตรียมความพร้อมทางการเรียนให้กับนักเรียนโดยผู้สอนทำการทบทวนและเชื่อมโยงความรู้เดิมเข้ากับความรู้ใหม่ ด้วยการใช้วิธีการซักถามหรือใช้คำถามนำ 2) ขั้นการสังเกต หมายถึง ขั้นที่ผู้สอนนำเสนอ โจทย์หรือสถานการณ์ปัญหาที่ทำให้ทายความคิดของนักเรียนและให้นักเรียนสังเกต โจทย์หรือสถานการณ์ที่เป็นปัญหานั้น และวิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหา 3) ขั้นการอธิบายและปฏิบัติกิจกรรม หมายถึง ขั้นที่ผู้สอนให้นักเรียนรวบรวมข้อมูลจากการวิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหาเพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งในขั้นนี้ผู้สอนจะคอยกระตุ้นให้นักเรียนค้นหาคำตอบ โดยอาศัยความสามารถในการให้เหตุผลมาอธิบายแนวคิดหรือวิธีการได้มาซึ่งคำตอบของปัญหา 4) ขั้นสรุป หมายถึง ขั้นที่นักเรียนสรุปเกี่ยวกับคำตอบหรือข้อสรุปของ โจทย์หรือสถานการณ์ปัญหา และ 5) ขั้นการประยุกต์ใช้ หมายถึง ขั้นที่ให้นักเรียนนำหลักการ กฎเกณฑ์และวิธีการแก้ปัญหาไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์อื่น ๆ (Suchman, 1962 อ้างถึงใน วีรยุทธ วิเชียร โชติ, 2521, หน้า 43-45; Bruner, 1966, p. 89; Bell, 1978, pp. 240-258; วิจิต สุรัตน์เรืองชัย, 2540, หน้า 82; วัฒนาพร ระงับทุกข์, 2542, หน้า 17; กรมวิชาการ, 2544, หน้า 36-37; สุวิทย์ มูลคำ และ อรทัย มูลคำ, 2545, หน้า 138-141) โดยจุดมุ่งหมาย ในการสอนแบบสืบสวนสอบสวนคือ เพื่อฝึกให้นักเรียนคิดอย่างมีเหตุผลและฝึกใช้ความคิดในการแก้ปัญหาด้วยตนเอง (สุพิน บุญชูวงศ์, 2538, หน้า 61) นอกจากนี้ ไสว พิกขาว (2544, หน้า 102-103) ได้กล่าวถึงข้อดีของการสอนแบบสืบสวนสอบสวนว่า นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการคิดและคิดอย่างมีเหตุผล ได้ฝึกการแก้ปัญหาและค้นหาคำสรุปความรู้ด้วยตนเอง และวัชรา เล่าเรียนดี (2554, หน้า 102) กล่าวว่า การสอนแบบสืบสวนสอบสวนมีข้อดี คือทำให้นักเรียนได้สร้างความรู้ด้วยตนเอง เป็นการเน้นทักษะการคิดระดับสูง (คิดวิเคราะห์ สังเคราะห์และประเมินผล) และคำตอบที่ได้จากการเรียนรู้และสรุปด้วยตัวนักเรียนเองจะจำได้นานและจำด้วยความเข้าใจ อีกทั้ง Malloy (1999 อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2547, หน้า 98-99) ได้เสนอแนวทางการพัฒนา การให้เหตุผลในระดับมัธยมศึกษา โดยให้ผู้สอนใช้แนวทางการสืบสอบในการส่งเสริมให้นักเรียนใช้เหตุผลในการตรวจสอบและอภิปรายเกี่ยวกับบริบทของปัญหา และเชื่อมโยงกับเนื้อหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์อื่นที่เกี่ยวข้อง นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยของ วรณวิสา จันทร์สุนทรภาพร (2557, หน้า 123) ที่พัฒนากิจกรรมการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการสืบเสาะหาความรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความคล้าย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน หลังการจัดกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการสืบเสาะหาความรู้สูงกว่าก่อนจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และงานวิจัยของ โสมรศม์

ดาหลาย (2551, หน้า 144) ที่ศึกษาผลของการพัฒนามโนทัศน์โดยใช้กระบวนการสืบสอบที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการพัฒนามโนทัศน์โดยใช้กระบวนการสืบสอบ มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปกติ ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ดังนั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน จึงเป็นการจัดการเรียนการสอนที่เหมาะสมที่จะนำมาใช้จัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์

ด้วยเหตุผลที่กล่าวมานี้ ทำให้ผู้วิจัยสนใจนำรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนมาใช้ในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหา และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนชลกันยานุกูล

วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน กับเกณฑ์ที่ร้อยละ 70
2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน กับเกณฑ์ที่ร้อยละ 70

สมมติฐานการวิจัย

1. นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่าเกณฑ์ที่ร้อยละ 70
2. นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่าเกณฑ์ที่ร้อยละ 70

กรอบแนวคิดในการวิจัย

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งมีขั้นตอน 5 ขั้นตอน ดังนี้

(Suchman, 1962 อ้างถึงใน วีรยุทธ วิเชียร โชติ, 2521, หน้า 43-45; Bruner, 1966, p. 89; Bell, 1978, pp. 240-258; วิชิต สุรัตน์เรืองชัย, 2540, หน้า 82; วัฒนาพร ระวังทุกข์, 2542, หน้า 17; กรมวิชาการ, 2544, หน้า 36-37; สุวิทย์ มูลคำ และ อรทัย มูลคำ, 2545, หน้า 138-141)

1. ขั้นเตรียมความพร้อม หมายถึง ขั้นการเตรียมความพร้อมทางการเรียนให้กับนักเรียน โดยผู้สอนทำการทบทวนและเชื่อมโยงความรู้เดิมเข้ากับความรู้ใหม่ ด้วยการใช้วิธีการซักถามหรือใช้คำถามนำ
2. ขั้นการสังเกต หมายถึง ขั้นที่ผู้สอนนำเสนอโจทย์หรือสถานการณ์ปัญหาที่ทำทลายความคิดของนักเรียนและให้นักเรียนสังเกต โจทย์หรือสถานการณ์ที่เป็นปัญหานั้น และวิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหา
3. ขั้นการอธิบายและปฏิบัติกิจกรรม หมายถึง ขั้นที่ผู้สอนให้นักเรียนรวบรวมข้อมูลจากการวิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหาเพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งในขั้นนี้ผู้สอนจะคอยกระตุ้นให้นักเรียนค้นหาคำตอบ โดยอาศัยความสามารถในการให้เหตุผลมาอธิบายแนวคิด หรือวิธีการได้มาซึ่งคำตอบของปัญหา
4. ขั้นสรุป หมายถึง ขั้นที่นักเรียนสรุปเกี่ยวกับคำตอบหรือข้อสรุปของ โจทย์หรือสถานการณ์ปัญหา
5. ขั้นการประยุกต์ใช้ หมายถึง ขั้นที่ให้นักเรียนนำหลักการ กฎเกณฑ์ และวิธีการแก้ปัญหาไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์อื่น ๆ

1. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
2. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ภาพที่ 1-1 กรอบแนวคิดในการวิจัย

ขอบเขตของการวิจัย

1. ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

1.1 ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนชลกันยานุกูล อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี จำนวน 230 คน

1.2 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนชลกันยานุกูล อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี จำนวน 1 ห้องเรียน รวม 50 คน ได้มาจากวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่ม (Cluster random sampling) ซึ่งนักเรียนทุกห้องมีผลการเรียนไม่ต่างกัน เนื่องจากทางโรงเรียนได้จัดนักเรียนของแต่ละห้องแบบคละความสามารถ

2. ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยจะดำเนินการทดลองสอนด้วยตนเองในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 โดยจะใช้เวลาในการวิจัยทั้งหมด 14 คาบ คาบละ 50 นาที แบ่งเป็นเวลาในการสอน 12 คาบ และเวลาในการทดสอบ 2 คาบ

3. ตัวแปรที่ใช้ในการวิจัย

3.1 ตัวแปรอิสระ (Independent variable) ได้แก่ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

3.2 ตัวแปรตาม (Dependent variable) ได้แก่ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

4. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามหลักสูตรสถานศึกษาโรงเรียนชลกันยานุกูล อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี ซึ่งมีรายละเอียดเนื้อหาย่อย คือ 1) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม 2) การพิสูจน์เอกลักษณ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ 3) ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 4) สมการตรีโกณมิติ 5) กฎของโคไซน์และไซน์ และ 6) การหาระยะทางและความสูง

นียมศัพท์เฉพาะ

1. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน หมายถึง การจัดการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นให้นักเรียนได้ศึกษาค้นคว้า และลงมือปฏิบัติกิจกรรมด้วยตนเอง โดยนักเรียนจะได้พบกับปัญหาที่ท้าทายความคิด ได้สังเกตและวิเคราะห์ปัญหาและใช้กระบวนการคิด หาคำตอบ เพื่อค้นหาวิธีการ แนวคิด หรือแนวทางแก้ปัญหาที่ถูกต้อง จนสามารถค้นพบข้อสรุปของปัญหารวมทั้งนำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์อื่น ๆ ได้ ซึ่งผู้สอนมีบทบาทคอย ส่งเสริม แนะนำให้คำปรึกษา และใช้คำถามกระตุ้นเพื่อให้นักเรียน ได้ค้นพบวิธีการแก้ปัญหาและ คำตอบของปัญหาหรือสถานการณ์นั้น ๆ ด้วยตนเอง ซึ่งมีขั้นตอน 5 ขั้นตอนดังนี้

1.1 ขั้นเตรียมความพร้อม หมายถึง ขั้นการเตรียมความพร้อมทางการเรียนให้กับ นักเรียนโดยผู้สอนทำการทบทวนและเชื่อมโยงความรู้เดิมเข้ากับความรู้ใหม่ ด้วยการใช้คำถามนำ

1.2 ขั้นการสังเกต หมายถึง ขั้นที่ผู้สอนนำเสนอโจทย์หรือสถานการณ์ปัญหา ที่ท้าทายความคิดของนักเรียนและให้นักเรียนสังเกตโจทย์หรือสถานการณ์ที่เป็นปัญหานั้น และ วิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหา

1.3 ขั้นการอธิบายและปฏิบัติกิจกรรม หมายถึง ขั้นที่ผู้สอนให้นักเรียนรวบรวม ข้อมูลจากการวิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหาเพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งในขั้นนี้ผู้สอนจะ คอยกระตุ้นให้นักเรียนค้นหาคำตอบ โดยอาศัยความสามารถในการให้เหตุผลมาอธิบายแนวคิด หรือวิธีการได้มาซึ่งคำตอบของปัญหา

1.4 ขั้นสรุป หมายถึง ขั้นที่นักเรียนสรุปเกี่ยวกับคำตอบหรือข้อสรุปของโจทย์หรือ สถานการณ์ปัญหา

1.5 ขั้นการประยุกต์ใช้ หมายถึง ขั้นที่ให้นักเรียนนำหลักการ กฎเกณฑ์ และวิธี การแก้ปัญหาไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์อื่น ๆ

2. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการ ประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/ กระบวนการแก้ปัญหาเพื่อนำไปใช้ในการหาคำตอบ ของปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยการแสดงความสามารถในการแก้ปัญหตามกระบวนการ ดังนี้

2.1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นการวิเคราะห์ข้อมูลว่าปัญหามีอะไรบ้าง กำหนด อะไรบ้าง และมีเงื่อนไขอย่างไร

2.2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา เป็นขั้นการหาความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ทั้งที่เป็น สิ่งที่กำหนดให้และข้อมูลที่เป็นผลมาจากสิ่งที่กำหนดให้ และเลือกวิธีการแก้ปัญหาที่เหมาะสม

2.3 ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นการนำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ให้เหมาะสมและ แสดงการแก้ปัญหาเป็นลำดับขั้นตอน

2.4 ขั้นการสรุปคำตอบ เป็นขั้นสรุปคำตอบว่าได้ผลที่ได้เป็นไปตามที่ต้องการครบถ้วนหรือไม่

ซึ่งวัดได้จากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นแบบอัตนัย จำนวน 6 ข้อ โดยมีเกณฑ์การให้คะแนนแบบวิเคราะห์

3. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การอธิบาย แสดงแนวคิด การอ้างอิงเหตุผลประกอบ และแสดงข้อสรุปของคำตอบที่สมเหตุสมผล ซึ่งวัดได้จากแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นแบบอัตนัย จำนวน 6 ข้อ โดยมีเกณฑ์การให้คะแนนแบบองค์รวม

4. เกณฑ์ หมายถึง คะแนนขั้นต่ำที่จะยอมรับว่านักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ วิเคราะห์ได้จากคะแนนสอบหลังเรียน แล้วนำคะแนนคิดเป็นร้อยละเทียบเป็นเกณฑ์ โดยผู้วิจัยใช้เกณฑ์ที่ร้อยละ 70 ขึ้นไปของคะแนนรวม ซึ่งอยู่ในระดับดี ตามกระทรวงศึกษาธิการ (2552 ข, หน้า 14)

5. นักเรียน หมายถึง ผู้ที่กำลังศึกษาอยู่ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 โรงเรียนชลกันยานุกูล อำเภอเมืองชลบุรี จังหวัดชลบุรี

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับการวิจัย

1. ผู้วิจัยได้แผนการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และสามารถนำไปใช้ประโยชน์ต่อไปได้ในอนาคต
2. ได้พัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง
3. ได้แนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ให้แก่ผู้ที่สนใจ

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
 - 1.1 ความสำคัญของหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
 - 1.2 จุดประสงค์ของหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
 - 1.3 คุณภาพนักเรียนเมื่อนักเรียนจบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
 - 1.4 สาระและมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. หลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนชลกันยานุกูล กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
 - 2.1 คำอธิบายรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 32201 (คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3)
 - 2.2 ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
3. การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์
 - 3.1 ความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์
 - 3.2 หลักการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์
 - 3.3 จิตวิทยาการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์
4. รูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน
 - 4.1 ความเป็นมาของรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน
 - 4.2 ความหมายของการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน
 - 4.3 วัตถุประสงค์ของการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน
 - 4.4 ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน
 - 4.5 บทบาทของครูในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน
 - 4.6 ข้อดีและข้อจำกัดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน
5. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
 - 5.1 ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์
 - 5.2 ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
 - 5.3 ความหมายของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

- 5.4 ความสำคัญของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 5.5 กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 5.6 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 5.7 การประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
 - 5.7.1 เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปรีค
 - 5.7.2 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 6. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
 - 6.1 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
 - 6.2 ความหมายของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
 - 6.3 ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
 - 6.4 ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
 - 6.5 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
 - 6.6 เกณฑ์การให้คะแนนการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- 7. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

กระทรวงศึกษาธิการ (2552 ก, หน้า 56-91) ให้รายละเอียดเกี่ยวกับหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

ความสำคัญของหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วน รอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้อง เหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์มุ่งให้เยาวชนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่องตามศักยภาพ โดยกำหนดสาระหลักที่จำเป็นสำหรับนักเรียนทุกคนดังนี้

1. จำนวนและการดำเนินการ ความคิดรวบยอดและความรู้สึกระหว่างจำนวน ระบบ

จำนวนจริง สมบัติเกี่ยวกับจำนวนจริง การดำเนินการของจำนวน อัตราส่วน ร้อยละ การแก้ปัญหาเกี่ยวกับจำนวน และการใช้จำนวนในชีวิตจริง

2. การวัด ความยาว ระยะทาง น้ำหนัก พื้นที่ ปริมาตรและความจุ เงินและเวลา หน่วยวัดระบบต่าง ๆ การคาดคะเนเกี่ยวกับการวัด อัตราส่วนตรีโกณมิติ การแก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด และการนำความรู้เกี่ยวกับการวัด ไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ

3. เรขาคณิต รูปเรขาคณิตและสมบัติของรูปเรขาคณิตหนึ่งมิติ สองมิติ และสามมิติ การนีกภาพ แบบจำลองทางเรขาคณิต ทฤษฎีบททางเรขาคณิต การแปลงทางเรขาคณิต (Geometric transformation) ในเรื่องการเลื่อนขนาน (Translation) การสะท้อน (Reflection) และการหมุน (Rotation)

4. พีชคณิต แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน เซตและการดำเนินการของเซต การให้เหตุผล นิพจน์ สมการ ระบบสมการ อสมการ กราฟ ลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต อนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิต

5. การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น การกำหนดประเด็น การเขียนข้อคำถาม การกำหนดวิธีการศึกษา การเก็บรวบรวมข้อมูล การจัดระบบข้อมูล การนำเสนอข้อมูล ค่ากลางและการกระจายของข้อมูล การวิเคราะห์และการแปลความข้อมูล การสำรวจความคิดเห็น ความน่าจะเป็น การใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นในการอธิบายเหตุการณ์ต่าง ๆ และช่วยในการตัดสินใจในการดำเนินชีวิตประจำวัน

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ การแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลาย การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

จุดประสงค์ของหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เพื่อให้นักเรียนได้พัฒนาความสามารถในการคิด การคำนวณ สามารถนำคณิตศาสตร์ไปใช้เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และในการดำรงชีวิตให้มีคุณภาพ จึงต้องปลูกฝังให้นักเรียนมีคุณลักษณะดังนี้

1. มีความรู้ความเข้าใจในคณิตศาสตร์พื้นฐานและมีทักษะในการคิดคำนวณ
2. รู้จักคิดอย่างมีเหตุผล และแสดงความคิดออกอย่างเป็นระบบ ชัดเจนรัดกุม
3. รู้คุณค่าของคณิตศาสตร์ และมีเจตคติดีต่อคณิตศาสตร์
4. สามารถนำประสบการณ์ทางด้านความรู้ ความคิด และทักษะที่ได้จากการเรียนคณิตศาสตร์ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวัน

คุณภาพนักเรียน

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ได้ระบุถึงคุณภาพนักเรียนเมื่อนักเรียนจบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ดังนี้

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับระบบจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง จำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ และจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ หาค่าประมาณของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ และจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังโดยใช้วิธีการคำนวณที่เหมาะสมและสามารถนำสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ได้
2. นำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้คาดคะเนระยะทาง ความสูง และแก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดได้
3. มีความคิดรวบยอดในเรื่องเซต การดำเนินการของเซต และใช้ความรู้เกี่ยวกับแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์แสดงเซตไปใช้แก้ปัญหา และตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผล
4. เข้าใจและสามารถใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยได้
5. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สามารถใช้ความสัมพันธ์และฟังก์ชันแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้
6. เข้าใจความหมายของลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต และสามารถหาพจน์ทั่วไปได้ เข้าใจความหมายของผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต อนุกรมเรขาคณิต และหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิต โดยใช้สูตรและนำไปใช้ได้
7. รู้และเข้าใจการแก้สมการ และอสมการตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสอง รวมทั้งใช้กราฟของสมการ อสมการ หรือฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
8. เข้าใจวิธีการสำรวจความคิดเห็นอย่างง่าย เลือกใช้ค่ากลางได้เหมาะสมกับข้อมูลและวัดดูประสงค์ สามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัชยฐาน ฐานนิยม ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และเปอร์เซ็นต์ไทล์ของข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูล และนำผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลไปช่วยในการตัดสินใจ
9. เข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ ประกอบการตัดสินใจ และแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้
10. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ใน

การสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้อง และชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ในงานวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยเน้นคุณภาพนักเรียนด้านการนำความรู้เรื่องการประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ไปใช้คาดคะเนระยะทาง ความสูง และแก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด ได้รวมทั้งนักเรียนสามารถให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจได้อย่างเหมาะสม

สาระและมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ได้กำหนดสาระและมาตรฐานการเรียนรู้ในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ไว้ทั้งหมด 6 สาระ รวม 14 มาตรฐาน ดังนี้ สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการต่างๆ และใช้การดำเนินการในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 1.3 ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 1.4 เข้าใจระบบจำนวนและนำเสนอบัติเกี่ยวกับจำนวนไปใช้

สาระที่ 2 การวัด

มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัด

มาตรฐาน ค 2.2 แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด

สาระที่ 3 เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.1 อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ

มาตรฐาน ค 3.2 ใช้การนึกภาพ (Visualization) ให้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (Spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (Geometric model) ในการแก้ปัญหา

สาระที่ 4 พิชคณิต

- มาตรฐาน ค 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (Pattern) ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical model) อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหา

สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

- มาตรฐาน ค 5.1 เข้าใจและใช้วิธีการทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูล
- มาตรฐาน ค 5.2 ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ได้ อย่างสมเหตุสมผล
- มาตรฐาน ค 5.3 ใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหา

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

- มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน

พุทธศักราช 2551 ได้กำหนดสาระและมาตรฐานการเรียนรู้ในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ไว้ทั้งหมด 6 สาระ และ 14 มาตรฐาน ซึ่งเนื้อหาที่ผู้วิจัยนำมาใช้ประกอบงานวิจัยในครั้งนี้เป็นส่วนหนึ่งในสาระที่ 2 การวัด และสาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ คือ ความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

หลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนชลกันยานุกูล กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โรงเรียนชลกันยานุกูล กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (2556, หน้า 65-69) อธิบายว่า หลักสูตรสถานศึกษาของ โรงเรียนชลกันยานุกูล กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1 ได้เปิดการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ค 32101 (คณิตศาสตร์พื้นฐาน 3) คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 32201 (คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3) และคณิตศาสตร์พิเศษ ค 30293 (คณิตศาสตร์พิเศษ 1(G)) ซึ่งการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยใช้เนื้อหาในรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3 ค 32201 ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

คำอธิบายรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 32201 (คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3)

คำอธิบายรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 32201 (คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1 เวลา 80 ชั่วโมง จำนวน 2.0 หน่วยกิต มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

เพื่อพัฒนาศักยภาพของนักเรียน ให้มีความรู้ความเข้าใจ และสามารถนำความรู้ที่นำไปประยุกต์ได้ในเนื้อหาเกี่ยวกับ

1. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม ลอการิทึมสามัญ การคำนวณค่าประมาณโดยใช้ลอการิทึม การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึม
2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ วงกลมหนึ่งหน่วย ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เอกล็กษณ์ สมการตรีโกณมิติ กฎของโคไซน์และไซน์ การหาระยะทางและความสูง
3. เวกเตอร์ในสามมิติ เวกเตอร์สองมิติ การบวกเวกเตอร์ การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์
4. โดยจัดประสบการณ์ หรือสร้างสถานการณ์ในชีวิตประจำวันที่เกี่ยวข้อง ให้นักเรียนได้ศึกษาค้นคว้า โดยการใช้ปฏิบัติ ทดลอง สรุป รายงาน

เพื่อพัฒนาทักษะ/ กระบวนการในการคิดคำนวณการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ สามารถเชื่อมโยงประสบการณ์ด้านความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และนำประสบการณ์ด้านความรู้ ความคิด ทักษะ/ กระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่า และมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบระเบียบ มีความรอบคอบ และมีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง

ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ศึกษาผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1 รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 32201 (คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3) โรงเรียนชลกันยานุกูล อ.เมืองชลบุรี จ.ชลบุรี มีรายละเอียดดังตารางที่ 2-1

ตารางที่ 2-1 แสดงผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 32201 (คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3)

ลำดับ ที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้
1.	ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	<p>1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม และเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</p> <p>2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม ไปใช้แก้ปัญหาได้</p>	<p>1. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม</p> <p>2. รากที่ n ในระบบจำนวนจริงและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์</p> <p>3. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ</p> <p>4. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล</p> <p>5. ฟังก์ชันลอการิทึม</p> <p>6. การหาค่าลอการิทึม</p> <p>7. การเปลี่ยนฐานลอการิทึม</p> <p>8. สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึม</p> <p>9. การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม</p>

ตารางที่ 2-1 (ต่อ)

ลำดับ ที่	ชื่อหน่วยการ เรียนรู้	ผลการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้
2.	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และการประยุกต์	3. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับ ฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟ ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 4. นำความรู้เรื่องฟังก์ชัน ตรีโกณมิติและการประยุกต์ไปใช้ แก้ปัญหาได้	1. ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ 2. ค่าของฟังก์ชัน ไซน์และ โคไซน์ 3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ 4. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 5. การใช้ตารางฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ 6. กราฟของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ 7. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของ ผลบวกและผลต่างของ จำนวนจริงหรือมุม 8. การพิสูจน์เอกลักษณ์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ 9. ตัวผกผัน ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 10. สมการตรีโกณมิติ 11. กฎของโคไซน์และไซน์ 12. การหาระยะทางและ ความสูง

ตารางที่ 2-1 (ต่อ)

ลำดับ ที่	ชื่อหน่วยการ เรียนรู้	ผลการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้
3.	เวกเตอร์ในสามมิติ	5. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับ เวกเตอร์ในสามมิติ 6. หาผลบวก ผลต่างของเวกเตอร์ ผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์และผล คูณเชิงเวกเตอร์ได้ 7. หาขนาดและทิศทางของ เวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้	1. ระบบพิกัดฉากสามมิติ 2. เวกเตอร์ 3. เวกเตอร์ในระบบพิกัด ฉาก 4. ผลคูณเชิงสเกลาร์ 5. ผลคูณเชิงเวกเตอร์
4.	การเสริมทักษะ กระบวนการทาง คณิตศาสตร์	8. ใช้วิธีหลากหลายในการแก้ ปัญหา ใช้ทักษะกระบวนการทาง คณิตศาสตร์แก้ปัญหาได้อย่าง เหมาะสม มีการให้เหตุผล การใช้ ภาษาและสัญลักษณ์ทาง คณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอได้ อย่างถูกต้อง มีการเชื่อมโยงความรู้ ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และมี ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ใน การทำงาน	1. ทักษะกระบวนการทาง คณิตศาสตร์

จากผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้ของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม
ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1 รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 32201 (คณิตศาสตร์
เพิ่มเติม 3) โรงเรียนชลกันยานุกูล อำเภอเมืองชลบุรี จังหวัดชลบุรี ดังกล่าว ผู้วิจัยใช้หน่วย
การเรียนรู้ เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ มาใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ซึ่งมีผลการเรียนรู้และ
สาระการเรียนรู้ ดังตารางที่ 2-2

ตารางที่ 2-2 ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 32201
(คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3) ที่ใช้ในการวิจัย

ชื่อหน่วยการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้
ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และการประยุกต์	<ol style="list-style-type: none"> 1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ไปใช้แก้ปัญหาได้ 3. ใช้วิธีหลากหลายในการแก้ปัญหา ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม มีการให้เหตุผล การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง มีการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการทำงาน 	<ol style="list-style-type: none"> 1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม 2. การพิสูจน์เอกลักษณ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ 3. ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 4. สมการตรีโกณมิติ 5. กฎของโคไซน์และไซน์ 6. การหาระยะทางและความสูง

การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีบทบาทสำคัญต่อการดำเนินชีวิตประจำวันของมนุษย์ ซึ่งมีการศึกษาและหน่วยงานต่าง ๆ ได้กล่าวถึงความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ ดังนี้

บรรพต สุวรรณประเสริฐ (2544, หน้า 106) กล่าวว่า คณิตศาสตร์ช่วยพัฒนาบุคคลแต่ละคนและช่วยพัฒนาสังคม เหตุผลที่จะทำให้เห็นชัดคือ การตอบคำถามเกี่ยวกับความสำคัญของการสอนคณิตศาสตร์ การที่เราให้นักเรียนศึกษาคณิตศาสตร์ เพราะวิชาคณิตศาสตร์ช่วยพัฒนาชีวิตนักเรียนแต่ละคน และช่วยในการดำรงชีวิตของแต่ละคนในสังคมนอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังมีส่วนผสมผสานในเรื่องของชีวิตส่วนตัวของนักเรียน 4 ส่วน คือ อาชีพ ความต้องการพื้นฐาน นันทนาการและวัฒนธรรม ซึ่งแต่ละบุคคลมีความต้องการใช้คณิตศาสตร์ในแง่ที่แตกต่างกัน

และอย่างน้อยที่สุดเราทุกคนต้องการมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ไปช่วยอธิบายว่าทำไมจึงเป็นเช่นนั้น

ยูพิน พิพิชกุล (2545, หน้า 1) กล่าวว่า วิชาคณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิดเราใช้คณิตศาสตร์พิสูจน์อย่างมีเหตุผลว่า สิ่งที่เราคิดนั้นเป็นความจริงหรือไม่ ด้วยวิธีคิดเราก็สามารถนำคณิตศาสตร์ไปแก้ไขปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ คณิตศาสตร์ช่วยให้เราเป็นผู้มีเหตุผล เป็นคนใฝ่รู้ตลอดจนพยายามคิดสิ่งแปลกใหม่ คณิตศาสตร์จึงเป็นรากฐานแห่งความเจริญของเทคโนโลยีด้านต่าง ๆ

สิริพร ทิพย์คง (2545, หน้า 1) กล่าวว่า วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ก่อให้เกิดความเจริญก้าวหน้าทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี โลกปัจจุบันเจริญขึ้นเพราะการคิดค้นทางวิทยาศาสตร์ ซึ่งต้องอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนาให้แต่ละบุคคลเป็นคนที่สมบูรณ์ เป็นพลเมืองที่ดี เพราะคณิตศาสตร์ช่วยเสริมสร้างความมีเหตุผลความเป็นคนช่างคิด ช่างริเริ่มสร้างสรรค์ มีระบบระเบียบในการคิด มีการวางแผนในการทำงาน และมีความสามารถในการตัดสินใจ มีความรับผิดชอบต่อกิจการงานที่ได้รับมอบหมาย ตลอดจนมีลักษณะของความเป็นผู้นำในสังคม

กระทรวงศึกษาธิการ (2552 ก, หน้า 56) เสนอว่า คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ ระเบียบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจและแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำรงชีวิตและช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนาคนให้เป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์ มีความสมดุลทั้งทางร่างกาย จิตใจ สติปัญญา และอารมณ์ สามารถคิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข

สสวท. (2555 ก, หน้า 1) เสนอว่า คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ และความเจริญก้าวหน้าของโลก มนุษย์ใช้คณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานในการศึกษาวิทยาศาสตร์เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ รวมทั้งใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการพัฒนาการคิดที่หลากหลาย ทั้งการคิดวิเคราะห์สังเคราะห์ คิดอย่างเป็นเหตุเป็นผล คิดอย่างมีวิจารณญาณ และคิดอย่างเป็นระบบและมีระเบียบแบบแผน ลักษณะการคิดดังกล่าวทำให้มนุษย์สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

จากที่กล่าวมาข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า คณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานในการศึกษาศาสตร์ต่าง ๆ เป็นเครื่องมือในการพัฒนาการคิด ทั้งการคิดวิเคราะห์สังเคราะห์ คิดอย่างเป็นเหตุเป็นผล คิดอย่างมีวิจารณ์ญาณ และคิดอย่างเป็นระบบและมีระเบียบแบบแผน นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนาคนให้เป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์ทั้งทางร่างกาย จิตใจ สติปัญญา และอารมณ์ สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ คาคการณ์ วางแผน ดัดลึนใจ แก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่น ได้อย่างมีความสุข

หลักการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพื่อให้นักเรียนประสบผลสำเร็จได้นั้นไม่เพียงแต่ครูผู้สอนจะมีความความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาและวิธีสอนอย่างดียิ่งเท่านั้น ครูผู้สอนจะต้องมีความรู้เกี่ยวกับหลักการสอนเป็นอย่างดีด้วย เพื่อจะช่วยให้การจัดการเรียนรู้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น มีนักรักศึกษาได้ให้หลักการ ในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์หลายทรรศนะด้วยกัน ดังนี้

ขนาด เชื้อสุวรรณทวี (2542, หน้า 7) กล่าวถึงหลักการจัดการเรียนรู้สอนคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

1. ให้นักเรียนได้เข้าใจพื้นฐานของคณิตศาสตร์ รู้จักใช้ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ รู้เหตุผล และรู้ถึงโครงสร้างทางคณิตศาสตร์
2. การเรียนรู้ควรเชื่อมโยงกับสิ่งที่เป็นรูปธรรมให้มากที่สุด
3. ความเข้าใจต้องมาก่อนทักษะความชำนาญ
4. ความเข้าใจอย่างเดียวไม่เพียงพอต่อการเรียนคณิตศาสตร์ นักเรียนต้องมีทักษะ ความชำนาญ
5. เน้นการฝึกฝนให้เกิดทักษะ การสังเกต ความคิดตามลำดับเหตุผล แสดงออกถึงความรู้สึกรักคิดอย่างเป็นระบบระเบียบ เรียบง่าย สั้น กะทัดรัด ชัดเจน สื่อความหมายได้ และมีความละเอียดถี่ถ้วน มีความมั่นใจ แม่นยำ และรวดเร็ว
6. เน้นการศึกษาและเข้าใจเหตุผล โดยใช้ยุทธวิธีการจัดการเรียนรู้ให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ เข้าใจ และค้นพบด้วยตนเอง เกิดความคิดสร้างสรรค์ เกิดการประยุกต์ใช้ได้ โดยไม่จำเป็น ต้องเรียนรู้โดยการจดจำหรือเลียนแบบจากครูเท่านั้น
7. ให้นักเรียนสนุกสนานกับการเรียนคณิตศาสตร์ รู้คุณค่าของการเรียนคณิตศาสตร์ สามารถนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน ได้ และเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้เรื่องอื่น ๆ หรือวิชาอื่นต่อไป
8. การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ไม่ควรเป็นเพียงการบอก ควรใช้คำถามช่วยกระตุ้นให้นักเรียนได้คิดและค้นพบหลักเกณฑ์ ข้อเท็จจริงต่าง ๆ ด้วยตนเอง เกยชินต่อการแก้ปัญหา อันจะเป็นแนวทางให้เกิดความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ มีทักษะในกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ยุพิน พิพิธกุล (2545, หน้า 11-12) ได้กล่าวถึงหลักการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ไว้ว่า

1. ควรสอนจากเรื่องง่ายไปสู่ยาก
2. เปลี่ยนจากรูปธรรมไปสู่นามธรรม ในเรื่องที่สามารถใช้สื่อการเรียนการสอนรูปธรรมประกอบ
3. สอนให้สัมพันธ์ความคิด เมื่อครูทบทวนเรื่องใดก็ควรทบทวนให้หมดการรวบรวมเรื่องที่ทำให้เหมือนกันเข้ากันเป็นหมวดหมู่ จะช่วยให้เข้าใจง่ายและจำได้อย่างแม่นยำขึ้น
4. เปลี่ยนวิธีการจัดการเรียนรู้ไม่ซ้ำซากเบื่อหน่าย ผู้สอนควรจะสอนให้สนุกสนานและน่าสนใจ
5. ใช้ความสนใจของนักเรียนเป็นจุดเริ่ม เป็นแรงคลไจที่จะเรียน ด้วยเหตุนี้ในการสอนจึงมีการนำเข้าสู่บทเรียนเร้าใจเสียก่อน
6. ควรคำนึงถึงประสบการณ์เดิม และทักษะเดิมที่นักเรียนมีอยู่ กิจกรรมใหม่ควรจะต่อเนื่องกับกิจกรรมเดิม
7. เรื่องที่สัมพันธ์กันก็ควรสอนไปพร้อม ๆ กัน
8. ให้นักเรียนมองเห็นโครงสร้าง ไม่ใช่เน้นแต่เนื้อหา
9. ไม่ควรเป็นเรื่องที่ยากเกินไป ผู้สอนบางคนชอบให้โจทย์ยาก ๆ เกินสาระการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ซึ่งอาจจะทำให้ผู้ที่เรียนอ่อนท้อถอย แต่ถ้านักเรียนที่เรียนเก่งอาจจะชอบควรจะส่งเสริมเป็นรายไป ในการจัดการเรียนรู้ต้องคำนึงถึงหลักสูตรและเลือกเนื้อหาเพิ่มเติมให้เหมาะสม ทั้งนี้เพื่อส่งเสริมศักยภาพ
10. สอนให้นักเรียนสามารถหาข้อสรุปได้ด้วยตนเอง การยกตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างจนนักเรียนเห็นรูปแบบ จะช่วยให้นักเรียนสรุปได้ อย่ารีบบอกเกินไปควรเลือกวิธีการต่าง ๆ ที่สอดคล้องกับเนื้อหา
11. ให้นักเรียนลงมือปฏิบัติในสิ่งที่ทำได้ ลงมือปฏิบัติจริงและประเมินการปฏิบัติจริง
12. ผู้สอนควรมีอารมณ์ขัน เพื่อช่วยให้บรรยากาศการเรียนน่าเรียนยิ่งขึ้นคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เรียนหนัก ครูจึงไม่ควรจะเคร่งเครียด ให้นักเรียนเรียนด้วยความสนุกสนาน
13. ผู้สอนควรมีความกระตือรือร้น และตื่นตัวอยู่เสมอ
14. ผู้สอนควรหมั่นแสวงหาความรู้เพิ่มเติม เพื่อที่จะนำสิ่งที่แปลกและใหม่มาถ่ายทอดให้นักเรียน ผู้สอนควรจะเป็นผู้ที่มีศรัทธาในอาชีพของตนจึงจะทำให้สอนได้ดี

สิริพร ทิพย์คง (2545, หน้า 110) กล่าวว่า ครูจำเป็นที่จะต้องทราบหลักการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และนำสิ่งเหล่านี้ไปใช้สอนเพื่อช่วยให้นักเรียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ด้วยความเข้าใจ มีความรู้ และประสบผลสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งหลักการสอนคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. สอนจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมไปหานามธรรม
2. สอนจากสิ่งที่ใกล้ตัวนักเรียนก่อนสอนสิ่งที่ไกลตัวนักเรียน
3. สอนจากเรื่องที่ยากก่อนสอนเรื่องที่ยาก
4. สอนตรงตามเนื้อหาที่ต้องการสอน
5. สอนให้คิดไปตามลำดับขั้นตอนอย่างมีเหตุผล
6. สอนด้วยอารมณ์ขัน ทำให้นักเรียนเกิดความเพลิดเพลิน เช่น เกม ปริศนา เพลง
7. สอนด้วยหลักจิตวิทยา สร้างแรงจูงใจ เสริมกำลังใจให้กับนักเรียน
8. สอนด้วยการนำไปสัมพันธ์กับวิชาอื่น ๆ เช่น วิชาคณิตศาสตร์ เกี่ยวกับการเพิ่มจำนวนแมลงหวี่ ซึ่งต้องอาศัยความรู้เรื่องเลขยกกำลัง

อัมพร ม้าคนอง (2546, หน้า 8) เสนอไว้ว่า หลักการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่สำคัญมีดังนี้

1. สอนให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ หรือได้ความรู้ทางคณิตศาสตร์จากการคิด และมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกับผู้อื่น ใช้ความคิดและคำถามที่นักเรียนสงสัยเป็นประเด็นในการอภิปราย เพื่อให้ได้แนวคิดที่หลากหลาย และนำไปสู่ข้อสรุป
2. สอนให้นักเรียนเห็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ความสัมพันธ์และความต่อเนื่องของเนื้อหาคณิตศาสตร์
3. สอนโดยคำนึงว่าจะให้นักเรียนเรียนอะไร (What) และเรียนอย่างไร (How) นั่นคือต้องคำนึงถึงเนื้อหาวิชาและกระบวนการเรียน
4. สอนโดยใช้สิ่งที่เป็นรูปธรรม อธิบายนามธรรม หรือการทำให้สิ่งที่เป็นนามธรรมมาก ๆ เป็นนามธรรมที่ง่ายขึ้น หรือพอที่จะจินตนาการได้มากขึ้น
5. จัดกิจกรรมการเรียนการสอน โดยคำนึงถึงประสบการณ์ และความรู้พื้นฐานของนักเรียน
6. สอนโดยใช้การฝึกหัดให้นักเรียนเกิดประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ทั้งการฝึกรายบุคคล ฝึกเป็นกลุ่ม การฝึกทักษะย่อยทางคณิตศาสตร์ และการฝึกทักษะรวมเพื่อแก้ปัญหาที่ซับซ้อนมากขึ้น
7. สอนเพื่อให้นักเรียนเกิดทักษะการคิดวิเคราะห์เพื่อแก้ปัญหา สามารถให้เหตุผล เชื่อมโยงสื่อสาร และคิดอย่างสร้างสรรค์ ตลอดจนเกิดความอยากรู้อยากเห็น และนำไปคิดต่อ
8. สอนให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์ในห้องเรียนกับคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน

9. ผู้สอนควรศึกษาธรรมชาติ และศักยภาพของนักเรียน เพื่อจะได้จัดกิจกรรมการสอนให้สอดคล้องกับนักเรียน

10. สอนให้นักเรียนมีความสุขในการเรียนคณิตศาสตร์ รู้สึกว่าคณิตศาสตร์ไม่ยากและมีความสนุกสนานในการทำกิจกรรม

11. สังเกต และประเมินการเรียนรู้ และความเข้าใจของนักเรียนในห้อง โดยใช้คำถามสั้น ๆ หรือการพูดคุยปกติ

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า หลักการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์นั้น ครูผู้สอนควรคำนึงถึงประสบการณ์เดิม และทักษะเดิมที่นักเรียนมีอยู่ กิจกรรมใหม่ควรจะต้องเกี่ยวกับกิจกรรมเดิมโดยใช้ยุทธวิธีการสอนให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ ควรใช้คำถามช่วยกระตุ้นให้นักเรียนเข้าใจ และค้นพบข้อเท็จจริงต่าง ๆ และหาข้อสรุปได้ด้วยตนเองเกิดการประยุกต์ใช้ได้ และฝึกหัดให้นักเรียนเกิดประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ทั้งการฝึกรายบุคคล ฝึกเป็นกลุ่ม เพื่อให้เคยชินต่อการแก้ปัญหา อันจะเป็นแนวทางให้เกิดทักษะในกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และเน้นการสอนให้คิดไปตามลำดับขั้นตอนอย่างมีเหตุผลและสามารถให้เหตุผลได้ ควรสังเกตและประเมินการเรียนรู้ และความเข้าใจของนักเรียนในห้อง โดยใช้คำถามสั้น ๆ หรือการพูดคุยปกติ

จิตวิทยาการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาหลายท่าน ได้กล่าวถึงจิตวิทยาการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้
 ยูพิน พิพิธกุล (2533, หน้า 6) กล่าวว่า ปัจจุบันการเรียนการสอนเป็นเรื่องที่ควบคู่กันไปอย่างแยกไม่ออก เพราะครูผู้สอนไม่ใช่ผู้บอกหรือนักเรียนนั้นต้องไม่เป็นผู้ตามตลอดกาล นักเรียนและครูผู้สอนมีกิจกรรมร่วมกันครูผู้สอนต้องศึกษาจิตวิทยาเกี่ยวกับนักเรียน ดังนี้

1. ความแตกต่างระหว่างบุคคล (Individual differences) นักเรียนย่อมมีความแตกต่างกันทั้งในด้านสติปัญญา อารมณ์ จิตใจ และลักษณะนิสัย โดยเฉพาะในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ จะมีความสามารถเหมือนกันไม่ได้ ในการจัดการเรียนรู้ครูผู้สอนพิจารณาในเรื่องต่อไปนี้

- 1.1 ศึกษานักเรียนว่าแต่ละคนมีสมบัติในการเรียนรู้อย่างไร
- 1.2 รู้จักวินิจฉัยว่าแต่ละคนประสบปัญหาและเกิดความลำบากในการเรียนคณิตศาสตร์อย่างไร
- 1.3 สามารถวางโครงการสอน ให้แก่นักเรียนที่เรียนเก่งและเรียนอ่อน
- 1.4 รู้จักหาวิธีที่แปลก ๆ ใหม่ ๆ มาสอนนักเรียนที่แตกต่างกัน
- 1.5 ครูผู้สอนควรรู้จักสร้างหน่วยบทเรียนที่จะเสริมความรู้ของนักเรียนหรือทำแบบฝึกหัดเสริมทักษะ

1.6 ครูผู้สอนต้องมีความอดทน ขยัน ใฝ่รู้ เสียสละ

2. จิตวิทยาในการเรียนรู้ (Psychology of learning) การเรียนเป็นกระบวนการพัฒนาการ นักเรียนจะเกิดการเรียนรู้ต่อเมื่อการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมเพื่อให้เข้าใจในการเรียนรู้ ดังนี้

2.1 การเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม เมื่อนักเรียนได้รับประสบการณ์หนึ่งเป็นครั้งแรก เขาก็อยาก رؤ้ออยากเห็นและอยากคิดออกมาให้ได้ วิธีการคิดนั้นอาจจะลองผิด ลองถูกแต่เมื่อนักเรียนได้รับประสบการณ์นั้นอีกครั้งเขาสามารถตอบแทนทันทีแสดงว่าเกิดการรับรู้

2.2 การถ่ายทอดการเรียนรู้จะสำเร็จมากน้อยเพียงไรขึ้นอยู่กับวิธีการสอนของครูผู้สอน

2.3 ธรรมชาติของการเรียนรู้ นักเรียนจะเกิดการเรียนรู้นั้นนักเรียนจะต้องรู้เรื่องเหล่านี้

2.3.1 รู้จักจุดประสงค์ในการเรียนในบทเรียนแต่ละบท

2.3.2 นักเรียนรู้จักสัมพันธ์ความคิด

2.3.3 นักเรียนรู้จักวิเคราะห์ข้อความในลักษณะที่เป็นแบบเดียวกัน หรือเปรียบเทียบกัน เพื่อนำไปสู่การค้นพบ

2.3.4 นักเรียนต้องเรียนด้วยความเข้าใจและสามารถนำไปใช้ได้

2.3.5 ครูผู้สอนต้องมีปฏิภาณ สมองไว รู้จักการนำไปสู่ข้อสรุป

2.3.6 นักเรียนควรจะมีวิธีเรียน

2.3.7 ครูผู้สอนไม่ทำโทษนักเรียน

3. จิตวิทยาในการฝึก (Psychology of drill) การฝึกนั้นเป็นสิ่งจำเป็น แต่การฝึกนั้นอาจมีผลทำให้นักเรียนเบื่อหน่ายได้ถ้าฝึกมากเกินไป ดังนั้นครูผู้สอนควรพิจารณาในการให้นักเรียนได้รับการฝึกดังนี้

3.1 การฝึกรายบุคคล

3.2 การฝึกทีละเรื่อง

3.3 ตรวจสอบแบบฝึกหัด

3.4 การให้แบบฝึกหัดต้องคำนึงความแตกต่างระหว่างบุคคล

3.5 แบบฝึกหัดนั้นควรฝึกในหลาย ๆ ด้าน

3.6 แบบฝึกหัดสอดคล้องกับบทเรียน

3.7 ก่อนทำแบบฝึกหัดต้องมั่นใจว่านักเรียนมีความเข้าใจเรื่องนั้นดีแล้ว

3.8 ควรฝึกอย่างไร นักเรียนจึงคิดเป็น ไม่ใช่คิดตาม

4. การเรียนโดยการกระทำ (Learning by doing) นักเรียนต้องได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง
5. ความพร้อม (Readiness) ครูผู้สอนต้องสำรวจความพร้อมของนักเรียน เพราะนักเรียนมีพื้นฐานที่แตกต่างกัน
6. แรงจูงใจ (Motivation) ครูผู้สอนต้องเป็นผู้สร้างแรงจูงใจให้นักเรียนอยากเรียนคณิตศาสตร์
7. การเสริมกำลังใจ (Reinforcement) ครูผู้สอนต้องเลือกใช้การเสริมกำลังใจให้เหมาะสมจะเป็นกำลังใจให้กับนักเรียนมาก

ขนาด เพื่อสุวรรณทวี (2542, หน้า 7-8) กล่าวถึงจิตวิทยาบางประการกับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ว่า การเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างประสบผลสำเร็จนั้น นอกจากปัจจัยภายนอกตัวนักเรียนจะมีผลต่อความสำเร็จแล้ว ยังมีปัจจัยเชิงจิตวิทยาในตัวนักเรียนที่จะช่วยส่งเสริมให้การเรียนรู้บรรลุจุดหมาย ปัจจัยภายในตัวนักเรียนที่สำคัญ ได้แก่ ความพร้อม เจตคติ แรงจูงใจ ความวิตกกังวล รวมทั้งสิ่งที่ผู้สอนควรตระหนักถึง ได้แก่

1. ความแตกต่างระหว่างบุคคล (Individual differences) ผู้สอนจะต้องตระหนักถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลของนักเรียนว่ามีความแตกต่างกันทั้งในด้านสติปัญญา จิตใจ อารมณ์ ลักษณะนิสัย และสภาพแวดล้อม ตลอดจนพื้นฐานความรู้เดิม การเรียนการสอนในชั้นเรียนซึ่งมีนักเรียนเป็นจำนวนมากแต่ละคนมีความแตกต่างกันในด้านต่างๆ มีปัญหาแตกต่างกันออกไป ครูผู้สอนจะต้องหาทฤษฎีแก้ไขปัญหาคือต้องศึกษานักเรียนแต่ละคนในชั้นเรียน หาจุดเด่น จุดบกพร่อง สำรวจความรู้พื้นฐาน วิธีสอนที่ใช้ก็ควรแตกต่างกันออกไป และสิ่งที่สำคัญที่สุดคือ ครูผู้สอนจะต้องมีความอดทน เสียสละเวลา ใฝ่หาความรู้สื่อ อุปกรณ์ สร้างบทเรียนเสริมความรู้สำหรับนักเรียนที่เก่งเพื่อให้ได้มีโอกาสพัฒนาตนเองให้มีความสามารถและทักษะเพิ่มขึ้นและบทเรียนเสริมความรู้สำหรับนักเรียนอ่อนเพื่อให้ติดตามการเรียนได้ทัน เริ่มจากยากไปง่าย เป็นรูปธรรม ให้มีกำลังใจในการเรียนรู้ต่อไป

2. การเรียนโดยการกระทำ (Learning by doing) ถ้านักเรียนสามารถได้ลงมือปฏิบัติทดลอง ใช้รูปธรรมอธิบายสิ่งที่เป็นนามธรรม ได้เห็นข้อเท็จจริง ได้ลงมือกระทำด้วยตนเอง จะทำให้นักเรียนสามารถเข้าใจและจดจำได้นาน จะได้ความคิดรวบยอดและเชื่อมโยงไปสู่เรื่องอื่นต่อไป อย่างไรก็ตามเนื้อหาในบางเรื่องก็อาจจะไม่สามารถให้นักเรียนลงมือปฏิบัติได้ ผู้สอนจะต้องเลือกวิธีสอนให้เหมาะสมกับเนื้อหา เช่น เรื่องความน่าจะเป็น การเรียงสับเปลี่ยน-จัดหมู่ สามารถให้นักเรียนทดลอง ลงมือปฏิบัติได้ในการแก้โจทย์ปัญหาที่ไม่ซับซ้อนหรือยุ่งยากมากนัก ให้นักเรียนได้เห็นจริง จะนำไปสู่ความคิดรวบยอด ในที่สุดก็สามารถสรุปเป็นสูตร นำไปใช้แก้โจทย์ที่ยุ่งยาก ซับซ้อนกว่าได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง

3. การเสริมกำลังใจ (Reinforcement) เป็นสิ่งสำคัญมากทำให้นักเรียนมีกำลังใจ มีความเชื่อมั่น กล้าคิด กล้าตอบ กล้าที่จะลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง ความผิดพลาดจะเป็น ประสพการณ์ตรง ที่จะนำไปสู่การปรับปรุงแก้ไขพัฒนา โดยมีครูเป็นผู้ชี้แนวทาง แต่ในทาง ตรงกันข้าม หากนักเรียนได้รับแต่คำตำหนิ การลงโทษ จะทำให้เกิดความเบื่อหน่าย ท้อแท้ หหมดกำลังใจ วิตกกังวล ไม่กล้าแสดงออก ไม่กล้าคิด ไม่กล้าตอบ กลัวการผิดพลาด

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมราช (2549, หน้า 415-416) ได้ให้ข้อเสนอแนะที่จะช่วยครู คณิตศาสตร์นำไปใช้ปรับปรุงกระบวนการจัดการเรียนรู้ในห้องเรียน ดังนี้

1. การเรียนในชั้นเรียนจะได้ผลสูงสุดก็ต่อเมื่อนักเรียนทุกคนให้ความร่วมมือเป็นอย่างดี ผู้สอนที่ประสานสายตากับนักเรียนและพูดคุยกับนักเรียนทุก ๆ คนจะได้รับความสำเร็จ ในเรื่องนี้ วิธีการหนึ่งที่จะทำให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนก็คือ ผู้สอนจะต้องใช้คำถามที่ให้นักเรียนได้มีโอกาสตอบได้ นั่นคือผู้สอนจะต้องเตรียมบทเรียนและจดคำถามที่จะถามนักเรียนที่เป็นพิเศษเฉพาะคน เพราะจากการตรวจแบบฝึกหัด ผู้สอนควรจะต้องทราบข้อดีและสิ่งที่บกพร่อง ในด้านคณิตศาสตร์ของนักเรียน

2. พยายามปรับบทเรียนให้มีความสัมพันธ์กับสิ่งที่นักเรียนคิดว่าสำคัญ ผู้สอนและนักเรียนอาจมีความแตกต่างกันทั้งในด้านสภาพแวดล้อม วัฒนธรรม และข้ออื่น ๆ ในการกำหนด จุดประสงค์ของการเรียนหรือการจัดบทเรียนจึงควรปรับให้สอดคล้องกับสภาพนักเรียน

3. ต้องมีการเตรียมการสอนอย่างดีและมีความกระตือรือร้นในการสอนไม่ว่าจะสอนนักเรียนประเภทใดก็ตาม

4. พยายามกระตุ้นให้นักเรียนตระหนักในความสามารถของตนเองโดยการช่วยให้นักเรียนตั้งเป้าหมายของชีวิตหรือเป้าหมายของการศึกษาที่รัดกุม และมีความเป็นไปได้ และช่วยพยายามให้นักเรียนมีความรับผิดชอบที่จะบรรลุให้ถึงเป้าหมายนั้น

5. จัดบรรยากาศในห้องเรียนเพื่อกระตุ้นให้เกิดการเรียนรู้ที่ดี และพยายามหลีกเลี่ยงที่จะทำให้นักเรียนเกิดความล้มเหลว โดยพยายามให้นักเรียนได้ทำงานตามระดับความสามารถ พยายามอย่าข่มขู่ของนักเรียนที่เรียนดีและทั้บถมนักเรียนที่เรียนไม่เก่ง

6. หาเวลาที่จะพบนักเรียนเป็นรายบุคคลหรือกลุ่มนอกห้องเรียนบ้าง เพื่อให้ผู้สอน ได้รู้จักและเข้าใจนักเรียนได้ดี เพื่อหาแนวทางในการช่วยเหลือนักเรียน นอกจากนี้ยังทำให้นักเรียนที่ไม่ค่อยเก่งหรือไม่ค่อยกล้าได้เห็นว่าคุณสอนให้ความสนใจ ซึ่งจะช่วยให้การสอนได้รับความสนใจจากนักเรียนมากขึ้น

7. ในขณะที่สอนพยายามหากิจกรรมที่กระตุ้นให้เกิดความซาบซึ้ง และพัฒนาเจตคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ผู้สอนไม่ควรเกาะแน่นอยู่กับบทเรียนเพียงอย่างเดียว ควรให้นักเรียนได้สำรวจหัวข้อหรือทักษะที่สนใจบ้าง นอกจากนั้นผู้สอนควรศึกษาความสนใจพิเศษของนักเรียนงานอดิเรก และกิจกรรมต่าง ๆ ของนักเรียน เพื่อจัดกิจกรรมการสอนให้สัมพันธ์กับสิ่งเหล่านั้น

8. ให้ความช่วยเหลือเป็นพิเศษแก่นักเรียนเกี่ยวกับวิธีการศึกษาหาความรู้ การใช้ตำราเรียน การค้นคว้าข้อมูลต่าง ๆ เพื่อช่วยส่งเสริมความก้าวหน้าของนักเรียน

9. จัดจำนวนนักเรียนในห้องให้พอเหมาะ ผู้สอนไม่สามารถจะสอนโดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล ได้ถ้ามีนักเรียนมากเกินไปโดยจัดแบบคละ

10. ประเมินผลตนเองอย่างสม่ำเสมอในด้านเนื้อหาวิชา เจตคติต่อนักเรียนและต่อการสอนคณิตศาสตร์ พยายามปรับปรุงให้เป็นไปในทางที่ดี นักเรียนจะมีความรู้สึกไวต่อท่าทีความจริงใจ ความรู้สึกนึกคิดของผู้สอนที่มีต่อนักเรียนและต่อการสอนคณิตศาสตร์

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่าจิตวิทยาการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์นั้น ผู้สอนจะต้องตระหนักถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลของนักเรียนทั้งในด้านสติปัญญา จิตใจ อารมณ์ ลักษณะนิสัย และสภาพแวดล้อม ตลอดจนพื้นฐานความรู้เดิม ต้องสอนให้นักเรียนเกิดความเข้าใจและสามารถนำไปใช้ได้ ซึ่งนักเรียนจะเกิดการเรียนรู้ที่นักเรียนจะต้องรู้จักประสงค์ในการเรียนในบทเรียนแต่ละบท ผู้สอนต้องสร้างแบบฝึกหัดสอดคล้องกับบทเรียน ก่อนให้ทำแบบฝึกหัดต้องมั่นใจว่านักเรียนมีความเข้าใจเรื่องนั้นดีแล้ว ผู้สอนจะต้องใช้คำถามที่ให้นักเรียนได้มีโอกาสตอบได้ ต้องมีการเตรียมการสอนอย่างดีและมีความกระตือรือร้นในการสอน ไม่ว่าจะสอนนักเรียนประเภทใดก็ตามครูผู้สอนต้องมีปฏิภาณ สมองใจ รู้จักการนำไปสู่ข้อสรุป ครูผู้สอนต้องเป็นผู้สร้างแรงจูงใจให้นักเรียนอยากเรียนคณิตศาสตร์ และต้องเลือกใช้การเสริมกำลังใจให้เหมาะสม และประเมินผลตนเองอย่างสม่ำเสมอในด้านเนื้อหาวิชา เจตคติต่อนักเรียนและต่อการสอนคณิตศาสตร์ และพยายามปรับปรุงให้เป็นไปในทางที่ดี

รูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

ความเป็นมาของรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

Suchman (อ้างถึงใน เจลิมลาก ทองอาจ, 2554, หน้า 7-9) มีความเชื่อเกี่ยวกับการค้นพบและการสร้างความรู้ด้วยตนเองของนักเรียนว่าเป็นสิ่งที่เกิดขึ้นเองตามธรรมชาติ ดังนั้น โดยเบื้องลึกของบุคคลจึงมีสามัญสำนึกแห่งการสืบสวนสอบสวนหรือความสนใจใคร่รู้ หรือกล่าวอีกนัยว่าทุกคนมีจิตแห่งความเป็นนักวิทยาศาสตร์อยู่ภายใน แนวคิดหรือความเชื่อที่ว่านักเรียนมีธรรมชาติแห่งการแสวงหาความรู้ และมีความกระตือรือร้นที่จะใช้กระบวนการสืบสวนสอบสวนเพื่อค้นพบ

ความหมายจากสิ่งต่าง ๆ ของ Suchman นั้น เป็นแนวคิดที่สอดคล้องกับปรัชญาการศึกษากลุ่มพิพัฒนาิยม (Progressivism) ซึ่งให้ความสำคัญกับกระบวนการแก้ปัญหา มากกว่าที่จะมุ่งสนใจที่ตัวความรู้ซึ่งอาจเปลี่ยนแปลงได้ ทั้งนี้เพราะปรัชญานี้ให้ความสำคัญกับวิธีการคิดที่บุคคลใช้ หรือ “คิดอย่างไร” (How to think) มากกว่าสิ่งที่กำลังคิด หรือ “คิดอะไร” (What to think) นอกจากนี้พื้นฐานด้านปรัชญาดังกล่าวข้างต้นแล้ว รูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนยังสัมพันธ์กับทฤษฎีการเรียนรู้การสร้างความรู้ (Constructivist theory of learning) อีกด้วย เนื่องจากทฤษฎีการเรียนรู้กลุ่มนี้มีสาระสำคัญว่า ผู้เรียนสามารถค้นพบและเปลี่ยนรูปแบบข้อมูลที่มีความซับซ้อนหรือปรับเปลี่ยนโครงสร้างปัญหาได้ด้วยตนเองหากข้อมูลใหม่ไม่สอดคล้องกับประสบการณ์เดิม

ปรัชญาการศึกษาและทฤษฎีการเรียนรู้ข้างต้นเป็นฐานที่สำคัญของรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เพราะเมื่อผู้สอนมีความเชื่อว่านักเรียนสร้างความรู้ด้วยตนเองได้ในการเรียนการสอน นักเรียนก็จะมิพบทบทสำคัญในการควบคุมกำกับตนเองให้เข้าสู่กระบวนการสืบสวนสอบสวน อย่างไรก็ตาม Suchman ได้นำธรรมชาติของนักเรียน โดยเฉพาะอย่างยิ่งความสนใจใคร่รู้ (Curiosity) มาเป็นจุดเริ่มต้นของกระบวนการสืบสวนสอบสวน และเพื่อให้แรงงูงใจจากความสนใจใคร่รู้มีมากเพียงพอ เขาจึงกำหนดขั้นตอนแรกของรูปแบบการเรียนรู้ให้เป็นขั้นการเผชิญกับปัญหา ประเด็นสำคัญจึงอยู่ที่ว่าผู้สอนจะสามารถเสนอข้อมูลหรือประสบการณ์ที่จะให้นักเรียนเกิดปัญหาหรือขัดแย้งทางปัญญาได้มากน้อยเพียงใด

รูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเริ่มครั้งแรกที่มลรัฐอิลลินอยส์ ประเทศสหรัฐอเมริกาในปี ค.ศ.1957 ซึ่งเป็นระยะที่สหรัฐอเมริกากำลังตื่นตัวเนื่องจากรัสเซียมีความก้าวหน้าถึงขั้นส่งจรวดขึ้นสู่อวกาศได้สำเร็จ จึงได้มีการปรับปรุงวิชาการด้านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์กันอย่างกว้างขวาง และได้มีผู้ทดลองวิจัยเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนกันตลอดมา ซึ่งการทดลองวิจัยที่สำคัญได้แก่ การวิจัยของ Suchman ที่ได้ตั้งโครงการวิจัยเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ที่มหาวิทยาลัยอิลลินอยส์ โดยเน้นการสอนวิทยาศาสตร์ด้วยวิธีให้นักเรียนตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนค้นพบหลักการ และกฎเกณฑ์ทางวิทยาศาสตร์ด้วยตนเอง (Suchman, 1962 อ้างถึงใน วีรยุทธ วิเชียร โชติ, 2521, หน้า 10)

ความหมายของการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

นักการศึกษาและหน่วยงานหรือสถาบันทางการศึกษาได้ให้ความหมายของการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ดังนี้

Good (1973, p. 303) ได้ให้คำจำกัดความของการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนว่ามีลักษณะเป็นแบบเตี๋ยกับการสอน โดยวิธีแก้ปัญหา (Problem solving approach) โดยระบุนลักษณะสำคัญคือ

1. เป็นการเรียนจากกิจกรรมที่จัดขึ้น
2. นักเรียนใช้วิธีการทางวิทยาศาสตร์ในการทำกิจกรรม

Carin (1993, p. 86) กล่าวว่า การเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เป็นกระบวนการที่เมื่อพบปัญหาแล้วมีการตั้งสมมติฐานหรือหาคำตอบที่เป็นไปได้ ทดสอบสมมติฐานนั้น ด้วยข้อมูลที่รวบรวมได้ แล้วพยายามที่จะประยุกต์ข้อสรุปนั้นมาเป็นความรู้ใหม่ โดยมีประเด็นหลักอยู่ที่กระบวนการ (Process) มากกว่าผลผลิต

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมราช (2537, หน้า 92) เสนอว่า การเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเป็นกระบวนการตรวจสอบปัญหาหรือสถานการณ์อันหนึ่งอันใดในการค้นหาความจริง การสืบสวนสอบสวนเป็นรูปแบบการเรียนรู้ที่ผู้สอนจัดสถานการณ์ที่เป็นปัญหาให้นักเรียนเกิดความสงสัยสถานการณ์นั้น จึงเป็นปัญหาสำหรับนักเรียน ทำให้นักเรียนต้องค้นหาสาเหตุเพื่อมาอธิบายปัญหานั้น โดยนักเรียนและผู้สอนเป็นผู้สืบสวนสอบสวนด้วยการตั้งคำถาม จุดมุ่งหมายปลายทางคือ นักเรียนสามารถสรุปความรู้ด้วย

สมชาย ชูชาติ (2538, หน้า 82) กล่าวว่า การเรียนรู้แบบสืบสวนเป็นการเรียนรู้ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนรู้ด้วยตนเอง โดยอาศัยหลักการและวิธีการทางวิทยาศาสตร์เช่นเดียวกับวิธีการสอนแบบแก้ปัญหาเพื่อพัฒนาความสามารถในการใช้สติปัญญาของนักเรียน

วิจิต สุรัตน์เรืองชัย (2540, หน้า 82) กล่าวว่า การเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน หมายถึง การสอนเน้นที่ให้นักเรียนค้นคว้าความรู้ด้วยตนเองโดยใช้การสังเกต สอบถาม และทดลองจนได้ข้อสรุป

วัฒนาพร ระงับทุกข์ (2542, หน้า 16) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเป็นการใช้คำถามที่มีความหมาย เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนสืบค้นหรือค้นหาคำตอบในประเด็นที่กำหนดให้ เน้นการให้นักเรียนรับผิดชอบการเรียนรู้ของตนเอง

กรมวิชาการ (2544, หน้า 36) เสนอว่า การเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน หมายถึง การเรียนรู้ที่เน้นการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการฝึกให้นักเรียนรู้จักค้นคว้าหาความรู้ โดยใช้กระบวนการคิดหาเหตุผล จนค้นพบความรู้หรือแนวทางแก้ปัญหาที่ถูกต้องด้วยตนเอง โดยครูตั้งคำถามประเภทกระตุ้นให้นักเรียนใช้ความคิดหาวิธีการแก้ปัญหาและสามารถนำวิธีการแก้ปัญหานั้นมาแก้ปัญหา

สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ (2545, หน้า 136) ได้กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน คือ กระบวนการเรียนรู้ที่เน้นการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการฝึกให้นักเรียนรู้จักศึกษาหาความรู้ โดยผู้สอนตั้งคำถามกระตุ้นให้นักเรียนใช้กระบวนการทางความคิดหาเหตุผลจนค้นพบความรู้ หรือแนวทางการแก้ปัญหาที่ถูกต้องด้วยตนเอง สรุปเป็น

หลักการกฎเกณฑ์ หรือวิธีการในการแก้ปัญหา สามารถนำไปประยุกต์ใช้ประโยชน์ในการควบคุม ปรับปรุง เปลี่ยนแปลง หรือสร้างสรรค์สิ่งแวดล้อมในสภาพการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างกว้างขวาง

วีณา ประชากุล และประสาท เนื่องเฉลิม (2553, หน้า 228) กล่าวว่า การเรียนรู้แบบ สืบสวนสอบสวน เป็นกระบวนการเรียนรู้ที่สามารถพัฒนานักเรียนให้พัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการฝึกให้นักเรียนรู้จักค้นคว้าหาความรู้ โดยผู้สอนมีบทบาทในการตั้งคำถาม เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้ใช้กระบวนการทางความคิด หาเหตุผลจนค้นพบความรู้หรือแนวทางในการแก้ปัญหาที่ถูกต้องด้วยตนเอง แล้วสรุปออกมาเป็นหลักการ หรือวิธีการในการแก้ปัญหาและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ประโยชน์ได้

จากการศึกษาค้นคว้าสรุปได้ว่า การเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน หมายถึง การจัด การเรียนรู้ที่มุ่งเน้นให้นักเรียนได้ศึกษาค้นคว้า และลงมือปฏิบัติกิจกรรมด้วยตนเอง โดยนักเรียนจะ ได้พบกับปัญหาที่ท้าทายความคิด ได้สังเกตและวิเคราะห์ปัญหาและใช้กระบวนการคิด คิดหา เหตุผล เพื่อค้นหาวิธีการ แนวคิด หรือแนวทางแก้ปัญหาที่ถูกต้อง จนสามารถค้นพบข้อสรุปของ ปัญหา รวมทั้งนำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์อื่น ๆ ได้ ซึ่งผู้สอนมีบทบาทคอย ส่งเสริม แนะนำให้คำปรึกษา และใช้คำถามกระตุ้นเพื่อให้นักเรียนได้ค้นพบวิธีการแก้ปัญหาและคำตอบของ ปัญหาหรือสถานการณ์นั้น ๆ ด้วยตนเอง

วัตถุประสงค์ของการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

มีผู้กล่าวถึงวัตถุประสงค์ของการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ดังนี้

Bell (1978, p. 342) ได้กล่าวถึง เป้าหมายหรือวัตถุประสงค์ของรูปแบบการเรียนรู้แบบ สืบสวนสอบสวนไว้ดังนี้

1. เพื่อพัฒนาทักษะทางสมองในการค้นคว้าและพัฒนากระบวนการแสวงหาความรู้
2. เพื่อเรียนรู้หลักต่าง ๆ ทางตรรกศาสตร์
3. เพื่อเข้าใจความเป็นเหตุเป็นผลที่สัมพันธ์กัน
4. เพื่อเรียนรู้วิธีการซักถามหรือการสอบสวนอย่างเป็นอิสระ
5. เพื่อค้นพบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่าง ๆ ซึ่งนำไปสู่ขั้นทั่วไปทางคณิตศาสตร์
6. เพื่อให้คุณค่าแก่กลวิธีการสืบสวนเสมือนเป็นวิธีที่นำไปสู่การค้นพบและแก้ปัญหา ทางคณิตศาสตร์
7. เพื่อเข้าใจวิธีต่าง ๆ ของการพิสูจน์และการดำเนินการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
8. เพื่อได้รับความเข้าใจดียิ่งขึ้นเกี่ยวกับพื้นฐานทางคณิตศาสตร์และธรรมชาติของ การเรียน
9. เพื่อค้นพบวิธีการและหลักการทางวิทยาศาสตร์

10. เพื่อให้ได้วิธีการคณิตศาสตร์อย่างเหมาะสม

สุพิน บุญชูวงศ์ (2538, หน้า 58) ได้กล่าวถึงจุดหมายในการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ดังนี้

1. กระตุ้นให้นักเรียนรู้จักทำการสืบสวนสอบสวนค้นคว้าความรู้ด้วยตนเอง
2. ฝึกให้นักเรียนคิดอย่างมีเหตุผล
3. ฝึกให้นักเรียนใช้ความคิดในการแก้ปัญหาด้วยตนเอง

สุวิทย์ มูลคำ และ อรทัย มูลคำ (2545, หน้า 136) กล่าวถึงวัตถุประสงค์ของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ดังนี้

1. เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้วิธีการสืบเสาะค้นคว้าหาความรู้อย่างมีกระบวนการและเหตุผล และสามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง
2. เพื่อฝึกให้นักเรียนกล้าคิด กล้าแสดงออก กล้าตัดสินใจ มีความรับผิดชอบและมีความมุ่งมั่นในการทำงานให้สำเร็จ

จากการศึกษาข้างต้นสรุปได้ว่า วัตถุประสงค์ของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวน มีดังนี้

1. เพื่อพัฒนาทักษะทางสมอง ของนักเรียนในการค้นคว้าและพัฒนากระบวนการหาความรู้
2. เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนรู้จักทำการสืบสวนสอบสวนค้นคว้าและสามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง
3. เพื่อเข้าใจความเป็นเหตุเป็นผลที่สัมพันธ์กัน
4. เพื่อเข้าใจวิธีต่าง ๆ ของการพิสูจน์และการดำเนินการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
5. เพื่อให้นักเรียนได้ใช้ความคิดในการแก้ปัญหาด้วยตนเอง และฝึกคิดอย่างมีเหตุผล
6. เพื่อฝึกให้นักเรียนกล้าคิด กล้าแสดงออก กล้าตัดสินใจ มีความรับผิดชอบในการทำงาน

ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

นักการศึกษาหลายท่านได้เสนอขั้นตอนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนแตกต่างกันออกไป ดังนี้

Suchman (1962 อ้างถึงใน วีรยุทธ วิเชียร โชติ, 2521, หน้า 43-45) ได้แบ่งกระบวนการสืบสวนสอบสวนออกเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ตั้งปัญหา ในขั้นนี้ผู้สอนสร้างสถานการณ์ขึ้นมาเพื่อให้เกิดช่องว่างระหว่างการรับรู้และความคิดเห็นเกี่ยวกับปัญหาที่เผชิญอยู่ ทำให้ผู้เรียนเกิดความต้องการที่จะสืบสอบต่อไป

ขั้นที่ 2 ชักถาม ในขั้นนี้ผู้เรียนจะตั้งคำถามเพื่อชักถามผู้สอน โดยผู้สอนจะตอบคำถาม ในรูปของคำตอบว่า “ใช่” หรือ “ไม่ใช่” เท่านั้น การกำหนดให้ถามและตอบแบบนี้เพื่อให้การเรียนรู้ ด้วยการสืบสอบของผู้เรียนเกิดขึ้นด้วยตนเองมากที่สุด ผู้เรียนจะถูกกระตุ้นให้รวบรวมข้อมูลในการชักถามซึ่งเป็นการให้ผู้เรียนใช้เหตุผลจากความคิดของตนเองและผู้เรียนจะทำการทดสอบสมมติฐาน โดยการทดลอง

ขั้นที่ 3 วิจัยกระบวนการสืบสอบ ในขั้นนี้ผู้สอนจะช่วยวิจารณ์ว่า ผู้เรียนควรปรับปรุงการถามอย่างไรบ้าง ขั้นตอนใดเหมาะสมหรือไม่ประการใดและควรปรับปรุงแก้ไขอย่างไร

Bruner (1966, p. 89) ได้เสนอกระบวนการสืบสวนสอบสวนไว้เป็น 4 ขั้นตอน ซึ่งเป็นที่รู้จักกันในชื่อ OEPIC Techniques ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. ขั้นสังเกต (Observation - O) เป็นที่สำคัญที่สุดอันดับแรกของกระบวนการแสวงหาความรู้ ขั้นสังเกตนี้ครูจัดสถานการณ์นั้น ๆ ว่ามีอะไรเป็นสาเหตุ เพราะเหตุใดจึงเป็นเช่นนั้น โดยพยายามหาแนวทางในการอธิบายไว้หลาย ๆ ทางตามแบบของการตั้งสมมติฐานต่อไป
2. ขั้นอธิบาย (Explanation-E) เมื่อใช้การสังเกตการเก็บรวบรวมข้อมูลในขั้นแรกแล้วต่อไปพยายามอธิบายสถานการณ์หรือปรากฏการณ์นั้น ๆ ว่ามีอะไรเป็นสาเหตุ เพราะเหตุใดจึงเป็นเช่นนั้น โดยพยายามหาแนวทางในการอธิบายไว้หลาย ๆ ทางตามแนวทางในการอธิบายไว้หลาย ๆ ทางตามแบบของการตั้งสมมติฐาน
3. ขั้นทำนายหรือคาดคะเน (Prediction - P) เมื่อทดลองสมมติฐาน เพื่อหาทางอธิบายว่าปัญหาเหล่านั้นมีสาเหตุจากอะไรแล้วนักเรียนก็พอจับเค้าโครงของปัญหาได้ชัดเจน ฉะนั้นจะสามารถคาดคะเนได้ว่า ถ้าสาเหตุเช่นเดียวกันอีก จะเกิดอะไรตามมา แม้ว่าไม่มีสถานการณ์เช่นปรากฏให้เห็นจริง ๆ
4. ขั้นควบคุมและสร้างสรรค์ (Control and creativity -C) คือขั้นที่สามารถนำแนวคิดที่ได้รับไปใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสถานการณ์อื่น ๆ ได้อย่างถูกต้อง

Bell (1978, pp. 240 – 258) กล่าวถึงรูปแบบการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ในวิชาคณิตศาสตร์แบ่งเป็น 4 ขั้นดังนี้

1. ขั้นสังเกต คือขั้นที่ผู้สอนจัดสถานการณ์ที่เป็นปัญหาให้นักเรียนเผชิญกับสถานการณ์ที่สงสัยหรือพยายามค้นพบหลักการ โดยการสังเกต วิเคราะห์ ประเมินสถานการณ์ และตั้งคำถามผู้แก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพและนักคณิตศาสตร์ที่ประสบความสำเร็จมากที่สุดคือผู้ที่ตั้งคำถามดีที่สุด คำถามที่ดีจะนำไปสู่หลักการที่มีประโยชน์และคำถามที่ดีจะมีผลในการแก้ปัญหาที่ยาก การหาสิ่งที่เป็นประโยชน์และน่าสนใจในการสืบสวนสอบสวนทางคณิตศาสตร์จะต้องดูว่า

สิ่งที่กำหนดให้คืออะไร และสืบสวนสอบสวนโดยพิจารณาตามสิ่งที่กำหนดให้ นั้น การสืบสวนสอบสวนมิได้ต้องการเพียงผลเท่านั้น ควรจะสืบสวนให้มากกว่าที่ต้องการ การตั้งคำถาม เช่น

- 1.1 ทำไมจึงใช้วิธีการนี้ทำได้
- 1.2 ทำไมคำตอบที่ได้จากวิธีการนี้จึงไม่ถูกต้อง
- 1.3 มีวิธีที่ดีกว่านี้หรือไม่
- 1.4 มีรูปแบบทั่วไปหรือไม่
- 1.5 ทฤษฎีบทนี้ทำให้นึกถึงทฤษฎีบทอื่นๆหรือไม่
- 1.6 ปัญหานี้เป็นปัญหาหนึ่งของปัญหาทั่วไปหรือไม่
- 1.7 จะสรุปเป็นรูปแบบทั่วไปได้หรือไม่
- 1.8 อะไรเป็นข้อแตกต่างระหว่างสถานการณ์ทั้งสองสถานการณ์นี้
- 1.9 มีอะไรคล้ายคลึงกันระหว่างระบบคณิตศาสตร์เหล่านี้
- 1.10 จากตัวอย่างที่สังเกตได้นี้เป็นตัวแทนของกรณีทั่วไปได้หรือไม่
- 1.11 มีตัวอย่างคัดค้านหรือไม่
- 1.12 มีวิธีที่แก้ปัญหาคิดว่านี้ใหม่
- 1.13 มีอะไรเกิดขึ้นกับสิ่งเหล่านี้ใหม่
- 1.14 มีความคงเส้นคงวาเกิดขึ้นหรือไม่
- 1.15 เรื่องราวหรือข้อมูลที่ได้นี้น่าจะยอมรับได้หรือไม่
- 1.16 หลักการที่หาได้จะขยายต่อไปได้อีกไหม
- 1.17 ตัวอย่างต่างๆที่แสดงมโนคติคืออะไร

2. ขันอธิบาย ผู้สอนกระตุ้นให้นักเรียนค้นหาคำตอบ เพื่อขจัดความสงสัยโดยการใช้เหตุผลเป็นการวิเคราะห์การแก้ปัญหาไปสู่เหตุ ชั้นนี้เป็นขั้นรวบรวมความรู้และข้อมูลเพื่อนำมาแก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ ซึ่งมี 2 ประการ

2.1 ในการที่จะแก้ปัญหานั้น ผู้แก้ปัญหามีเทคนิคในการแก้ปัญหาและเรียนรู้กระบวนการทางคณิตศาสตร์

2.2 ในการแก้ปัญหามีแหล่งความรู้ รู้จักวิเคราะห์สังเคราะห์ความรู้นั้น ตลอดจนรู้จักรวบรวมข้อมูลและเรียงความรู้ให้เป็นระบบ การตั้งคำถามนับว่าเป็นสิ่งสำคัญ ควรมีการตั้งคำถามดังตัวอย่างต่อไปนี้

- 2.2.1 มีข้ออ้างอิงที่เป็นมาตรฐานในเรื่องนี้หรือเปล่า
- 2.2.2 ข้ออ้างอิงนั้นหาได้ที่ไหน
- 2.2.3 แหล่งอื่นๆ ของความรู้คืออะไร

- 2.2.4 แหล่งความรู้ที่เชื่อถือได้เพียงใด
- 2.2.5 คุณภาพของความรู้ที่ได้รับนี้ดีเพียงใด
- 2.2.6 ความรู้นี้ใช้ประโยชน์ได้อย่างไร
- 2.2.7 ความรู้นี้เป็นหมวดหมู่และจัดระเบียบอย่างไร
- 2.2.8 มโนคติ หลักการ และวิธีการใดที่มีในแหล่งความรู้
- 2.2.9 ความรู้ที่สัมพันธ์กับปัญหาที่กำลังพิจารณาหรือไม่
- 2.2.10 ความรู้ที่นำมาใช้แก้ปัญหาได้เพียงไร
- 2.2.11 ความรู้หรือวิธีการดำเนินการเหล่านี้จะนำไปใช้กับสถานการณ์อื่นได้ไหม

3. ขั้นพยากรณ์และทดสอบ เป็นขั้นที่นำข้อมูลที่ได้มาอภิปรายปัญหาหรือข้อสมมติฐานที่ตั้งไว้ และพยากรณ์ผลหรือทำการทดลองเพื่อทดสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้ นำไปสู่ข้อสรุปเป็นขั้นซึ่งเกิดการค้นพบ การแก้ปัญหาในขั้นนี้เป็นการสร้างหลักการและความสัมพันธ์ต่าง ๆ แยกแยะโครงสร้างและนำไปสู่ข้อสรุป ผู้ที่เกี่ยวข้องในการทดสอบแบบสืบสวนสอบสวน ควรมีความสามารถพิเศษที่จะวิเคราะห์สังเคราะห์ ตลอดจนรู้จักประเมินผลงาน กิจกรรมในช่วงนี้จะต้องรู้จักจัดข้อมูลเป็นหมวดหมู่ มองหาความสัมพันธ์ ค้นหารูปแบบ และสรุปเป็นนัยทั่วไป

4. ขั้นนำไปใช้ เป็นขั้นที่นำเอาความรู้ที่ค้นพบไปใช้ไปใช้ให้เกิดประโยชน์ได้แก่ การวิเคราะห์และประเมินกระบวนการสืบสวนสอบสวน ทั้งนี้เพื่อสร้างความเข้าใจให้ดีขึ้นและปรับปรุงการสืบสวนสอบสวน ในขั้นนี้เป็นการพิจารณากระบวนการสืบสวนสอบสวนเนื้อหาทางคณิตศาสตร์แต่ละเนื้อหาต้องมีวิธีสืบสวนสอบสวนของมัน จุดประสงค์อันหนึ่งของผู้สืบสวนสอบสวนในแต่ละเนื้อหาก็คือ การปรับปรุงกลการสืบสวนสอบสวนที่กระทำอยู่และรวบรวมกระบวนการสืบสวนสอบสวนเพื่อนำไปพัฒนาและใช้กับเนื้อหาอื่น ๆ ต่อไปสิ่งที่ต้องการพิจารณาก็คือ กระบวนการสืบสวนสอบสวนตั้งแต่ต้นจนจบ วิธีการดำเนินการที่เหมาะสมในการที่จะวิเคราะห์และประเมินการสืบสวนสอบสวนก็คือ การถามและพยายามหาคำตอบตัวอย่างคำถามซึ่งจะนำมาใช้ในขั้นที่ 4 ตามที่ Bell (1978, pp. 240 – 258) กล่าวไว้ มีดังต่อไปนี้

- 4.1 วิธีการที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาเป็นอย่างไร
- 4.2 อะไรเป็นตัวกระตุ้นให้ค้นพบนัยทั่วไป
- 4.3 รูปแบบอะไรที่ค้นพบ
- 4.4 ความรู้และวิธีการที่จะนำไปสู่การค้นพบแบบไม่คงเส้นคงวาคืออะไร
- 4.5 แหล่งความรู้อะไรที่ใช้มากที่สุด
- 4.6 วิธีดำเนินการอะไรที่เคยมทำและรวบรวมข้อมูลอย่างไร
- 4.7 ใช้รูปแบบการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลรูปแบบใดในการแก้ปัญหา

4.8 กระบวนการคิดอะไรที่นำมาใช้กระทิงหาข้อสรุปได้

4.9 วิธีการแก้ปัญหานำไปใช้ได้ทั่วไปและประยุกต์ใช้กับการแก้ปัญหาอื่น ๆ ได้ไหม
 วิจิต สุรัตน์เรืองชัย (2540, หน้า 82) กล่าวถึง ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวน
 สอบสวนไว้ 4 ขั้นตอนดังนี้

1. สังเกต เป็นขั้นตอนที่ครูผู้สอนกำหนดสถานการณ์ปัญหาหรือเรื่องราวหรือ
 การทดลองที่น่าสนใจ ให้นักเรียนสังเกตและเกิดความสงสัยขึ้นหากนักเรียนสังเกตแล้วไม่เกิด
 ความสงสัยหรือเกิดปัญหาค้น ครูผู้สอนอาจชี้ปัญหาให้นักเรียนก็ได้

2. ทำนาย เป็นขั้นตอนที่นักเรียนคาดเดาคำตอบของปัญหาที่สงสัย โดยก่อนที่จะทำนาย
 นักเรียนจะทำการสืบสวนสอบสวน โดยใช้คำถามต่าง ๆ กับครูเพื่อให้ได้ข้อมูลมากที่สุดครูจะตอบ
 เพียงกว้าง ๆ ในหลักการ ไม่ตอบคำถามโดยตรง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนใช้คำถามอย่างกว้างขวาง
 ลึกซึ้ง จากนั้นนักเรียนจะทำนายคำตอบของปัญหาในขั้นแรก

3. ทดลอง เป็นขั้นตอนที่นักเรียนดำเนินการพิสูจน์คำตอบที่ครูผู้สอนเตรียมไว้ หรือหาก
 เป็นปัญหาที่ไม่ต้องทดลองเพื่อหาคำตอบก็อาจใช้การศึกษาค้นคว้าหรือวิธีการอื่นใด เพื่อพิสูจน์คำ
 ทำนายดังกล่าว

4. สรุป เป็นขั้นตอนการสรุปผลการทดลองหรือศึกษาค้นคว้าว่าคำตอบที่ทำนายไว้
 ถูกหรือผิดและสรุปเป็นความรู้ใหม่ต่อไป

วัฒนาพร ระงับทุกข์ (2542, หน้า 17) กล่าวถึง ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวน
 สอบสวน (Inquiry process) ไว้ 5 ขั้นตอน

1. กำหนดปัญหา

1.1 จัดสถานการณ์หรือเรื่องราวที่น่าสนใจ เพื่อกระตุ้นให้นักเรียน สังเกต สงสัย
 ในเหตุการณ์หรือเรื่องราว

1.2 กระตุ้นให้นักเรียนระบุปัญหาจากการสังเกตว่าอะไรคือปัญหา

2. กำหนดสมมติฐาน

2.1 ตั้งคำถามให้นักเรียนร่วมกันระดมความคิด

2.2 ให้นักเรียนสรุปสิ่งที่คาดว่าเป็นคำตอบของปัญหานั้น

3. รวบรวมข้อมูล

3.1 มอบหมายให้นักเรียนไปค้นคว้าหาข้อมูลจากเอกสารหรือแหล่งข้อมูลต่าง ๆ

3.2 ให้นักเรียนวิเคราะห์และประเมินว่า ข้อมูลนั้นมีความเกี่ยวข้องกับปัญหาหรือไม่
 มีความถูกต้องน่าเชื่อถือเพียงไร

4. ทดสอบสมมติฐาน

4.1 ให้นักเรียนนำข้อมูลที่ได้มารวบรวมกันอภิปราย เพื่อทดสอบสมมติฐาน

5. สร้างข้อสรุป

5.1 ให้นักเรียนสรุปว่า ปัญหานั้นมีคำตอบหรือข้อสรุปอย่างไร อาจสรุปในรูปของรายงานหรือเอกสาร

กรมวิชาการ (2544 , หน้า 36-37) กล่าวถึง ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนไว้ 5 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นการตั้งกัเป้าหมาย คือ ขั้นที่ครูปูพื้นฐานความพร้อมในด้านความรู้ให้แก่ นักเรียน
2. ขั้นสังเกต คือ ครูสร้างสถานการณ์ที่เป็นปัญหาหรือเป็นการแสดงละครปริศนาเพื่อให้นักเรียนสังเกตสภาพการณ์หรือสิ่งแวดล้อมที่เป็นปัญหานั้น ขั้นนี้ครูส่งเสริมให้นักเรียนฝึกคิดวิเคราะห์ ทำความเข้าใจ แปลความหมาย และจัดโครงสร้างความคิดในรูปแบบต่าง ๆ เพื่อให้สอดคล้องกับสภาพปัญหาและแรงจูงใจให้นักเรียนเกิดความกระหายใคร่จะแสวงหาความจริง
3. ขั้นอธิบาย เป็นขั้นที่ครูกระตุ้นให้นักเรียนหาคำอธิบายหรือสาเหตุของปัญหาในรูปแบบของเหตุผล ขั้นนี้นักเรียนฝึกการตั้งทฤษฎีหรือสมมติฐานเพื่ออธิบายที่มา สาเหตุของปัญหานั้นเป็นการฝึกวิเคราะห์ระบบจากผลไปหาเหตุ
4. ขั้นทำนาย ให้นักเรียนรู้จักหาแนวทางหรือวิธีที่จะพิสูจน์ทำนายผลหรือพยากรณ์ได้ว่าผลจะเป็นอย่างไร จะเกิดอะไรขึ้น เป็นการทดสอบสมมติฐานหรือพิสูจน์ทฤษฎีที่ตั้งขึ้น
5. ขั้นควบคุมและสร้างสรรค์ เป็นการส่งเสริมให้นักเรียนนำหลักการ กฎเกณฑ์และวิธีการแก้ปัญหามาใช้ประโยชน์ในการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงสิ่งแวดล้อมในสภาพการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างกว้างขวาง ลักษณะพิเศษของวิธีสอนแบบนี้คือ ก้าวไกลกว่าการสอนแบบวิทยาศาสตร์ ในด้านที่คิดไปถึงการใช้ประโยชน์ต่อไปด้วย ไม่จำกัดเฉพาะแต่การแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นเท่าไร

สุวิทย์ มูลคำ และ อรทัย มูลคำ (2545, หน้า 138-141) กล่าวถึง ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนไว้ดังนี้

1. ขั้น “สน” คือขั้นของการให้ตั้งกัเป้าหมาย ซึ่งได้แก่ การเตรียมความพร้อมทางการเรียนให้กับนักเรียน โดยการนำเอาความรู้และประสบการณ์เดิมของนักเรียนที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่สอนมาให้สัมพันธ์กันรวมทั้งปูพื้นฐานความรู้ใหม่ที่จำเป็น สำหรับการเรียนรู้ตั้งกัลักษณะร่วมของสถานการณ์ขององค์ประกอบต่าง ๆ ในสถานการณ์ที่เป็นปัญหา
2. ขั้น “ส” คือ ขั้นของการสังเกตสถานการณ์ที่เป็นปัญหาในขั้นนี้จะสร้างสถานการณ์ปัญหาขึ้น เพื่อให้นักเรียนสังเกตและวิเคราะห์องค์ประกอบและธรรมชาติของปัญหาอย่างละเอียด

การเรียนรู้ที่สำคัญในขั้นนี้คือ การเรียนตั้งค้กับ ลักษณะร่วมของสถานการณ์ขององค์ประกอบต่าง ๆ ในสถานการณ์ที่เป็นปัญหา

3. ขั้น “อ” คือ ขั้นของการอธิบายปัญหาข้อใจ โดยอาศัยความสามารถในการหาเหตุผลมาอธิบายถึงสาเหตุของปัญหา ส่วนมากการอธิบายมักจะอยู่ในรูปของความสัมพันธ์ระหว่างเหตุผลแบบฟังก์ชัน ขั้นนี้เป็นจุดเริ่มต้นของความสามารถในการสร้างทฤษฎีขึ้นมาสำหรับอธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ การเรียนที่สำคัญที่สุดในขั้นนี้คือการเรียนรู้หลักว่า เมื่อปรากฏผลออกมาในรูปแบบของปัญหาอย่างนี้ อะไรควรเป็นเหตุหรือสาเหตุของการเกิดผลอันนั้น

4. ขั้น “ท” คือ ขั้นของการทำนายผลเมื่อเราแปลเหตุเป็นขั้นตอนของการตั้ง สมมติฐานเพื่อจะทดสอบดูว่าคำอธิบายขั้นที่ 3 ว่าถูกต้องมากน้อยเพียงใด และยังเป็น การคาดคะเนผลของสาเหตุต่าง ๆ ทั้งนี้ เพื่อฝึกให้นักเรียนคิดอย่างรอบคอบ การเรียนที่สำคัญในขั้นนี้คือ การเรียนรู้วิธีแก้ปัญหาโดยหลักการที่เรียนรู้ในขั้นที่ 3 มาใช้

5. ขั้น “ค” คือ ขั้นของการควบคุมและสร้างสรรค์ทั้งสิ่งแวดล้อมภายนอกและภายในเป็นขั้นที่นำผลของการแก้ปัญหา มาปฏิบัติใช้ในชีวิตรจริง เพื่อให้เกิดการควบคุมสิ่งแวดล้อมภายใน (ทางจิตใจ) ขั้นนี้ส่งเสริมให้นักเรียนมีความคิดสร้างสรรค์ ฉะนั้นการเรียนที่สำคัญในขั้นนี้คือ การเรียนรู้วิธีสร้างสรรค์

ผู้วิจัยได้แสดงการสังเคราะห์ขั้นการสอนของรูปแบบการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเป็น 5 ขั้นตอน ดังตารางที่ 2-3

ตารางที่ 2-3 การตั้งภาระที่ขึ้นการสอบของรูปแบบการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

Suchman	Bruner	Bell	วิจิต สุรัตน์เรืองชัย	วัฒนาพร ระเบียบทุกซ์	กรมวิชาการ	สุวิทย์ และ อรทัย มูลคำ	ผู้วิจัย
1962	1966	1978	2540	2542	2544	2545	
1. ขึ้นตั้งปัญหา ในขั้นนี้ผู้สอน สร้างสถานการณ์ ขึ้นมาเพื่อให้ ผู้เรียนเกิดความ ต้องการที่จะ สืบสอบต่อไป	1. ขึ้นสังเกต ครูจัดสถานการณ์ ว่ามีอะไรเป็น สาเหตุ เพราะเหตุ ใดจึงเป็นเช่นนั้น โดยพยายามหา แนวทางใน การอธิบายไว้ หลาย ๆ ทาง	1. ขึ้นสังเกต คือขั้นที่ผู้สอนจัด สถานการณ์ที่เป็น ปัญหาให้นักเรียน เผชิญสถานการณ์ที่ สงสัยหรือพยายาม ค้นพบหลักการ โดยการสังเกต วิเคราะห์ ประเมิน สถานการณ์ และ ตั้งคำถาม	1. ขึ้นสังเกต เป็นขั้นตอนที่ ครูผู้สอนกำหนด สถานการณ์ปัญหา เรื่องราวที่น่าสนใจ ให้นักเรียนสังเกตและ เกิดความสงสัย 2. ขั้นทำนาย เป็นขั้นตอนที่นักเรียน คาดเดาคำตอบของ ปัญหาที่สงสัย	1. ขึ้นสังเกต คือ ขั้นที่ครูผู้สอน ความพร้อมในด้านความรู้ ให้นักเรียน	1. ขึ้นสังเกต ครูสร้างสถานการณ์ที่เป็น ปัญหาให้นักเรียน สังเกตปัญหานั้น ขั้นนี้ครู ส่งเสริมให้นักเรียนฝึกคิด วิเคราะห์ ทำความเข้าใจ แปลความหมาย จัดโครง สร้างความคิด รูปแบบ ต่าง ๆ เพื่อให้สอดคล้อง กับสภาพปัญหา	1. ขึ้นของการให้สิ่งที่ แนวทาง เป็นขั้นตอน ความพร้อมของนักเรียน โดยการนำความรู้ ประสบการณ์เดิมของ นักเรียนกับสิ่งที่สอนมา สัมพันธ์กันรวมทั้ง ปูพื้นฐานความรู้ใหม่	1. ขึ้นเตรียมความพร้อม หมายถึง ขั้นตอนเตรียม ความพร้อมทางการเรียน ให้นักเรียนโดยผู้สอนทำ การทบทวนและเชื่อมโยง ความรู้เดิมเข้ากับความรู้ ใหม่ ด้วยการใช้คำถามนำ

ตารางที่ 2-3 (ต่อ)

Suchman	Bruner	Bell	วितต์ สุรัตน์เรืองชัย	พัฒนาพร ระบัททุกซ์	กรมวิชาการ	สุวิทย์ และ อรรถัย มุอค่า	ผู้วิจัย
1962	1966	1978	2540	2542	2544	2545	
2. ขั้นซักถาม ในขั้นนี้ผู้เรียน จะตั้งคำถาม เพื่อซักถาม ผู้สอน ผู้เรียน จะถูกกระตุ้น ให้รวบรวม ข้อมูลใน การซักถามซึ่ง เป็นการให้ ผู้เรียนใช้ เหตุผลจาก ความคิดของ ตนเองและ ผู้เรียนจะทำ การหาคำตอบ สมมติฐานโดย การทดลอง	2. ขั้นอธิบาย ผู้สอนกระตุ้นให้ นักเรียนค้นหา ของปัญหาโดยการ เหตุผลเป็นการ วิเคราะห์ การแก้ปัญหา ไปสู่เหตุ ซึ่งผู้เรียน รวบรวมความรู้และ ข้อมูลเพื่อนำมา แก้ปัญหาหรือ สถานการณ์ต่าง ๆ ว่ามิใช่เป็น สาเหตุเพราะ เหตุใดจึงเป็น เช่นนั้นโดย พยายามหา แนวทางใน การอธิบายไว้ หลาย ๆ ทาง	3. ขั้นทดลอง เป็นขั้นตอนที่ นักเรียนค้นคว้า การพิสูจน์คำตอบ ที่ผู้สอนเตรียมไว้ หรือหากเป็น ปัญหาที่ไม่ต้อง ทดลองเพื่อหา คำตอบก็อาจใช้ การศึกษาค้นคว้า หรือวิธีการอื่นเพื่อ พิสูจน์คำตอบ ดังกล่าว	3. ขั้นรวบรวมข้อมูล ให้นักเรียนไป ค้นคว้าหาข้อมูลจาก แหล่ง ข้อมูลต่าง ๆ ให้นักเรียนวิเคราะห์ และประเมินว่า ข้อมูลนั้นมี ความเกี่ยวข้อง กับปัญหาหรือไม่ และมีความถูกต้อง มีความเกี่ยวข้อง กับปัญหาหรือไม่ และมีความถูกต้อง มีความเกี่ยวข้อง กับปัญหาหรือไม่	3. ขั้นอธิบาย เป็นขั้นที่ครู กระตุ้นให้นักเรียนหา คำอธิบายหรือสาเหตุของ ปัญหาในรูปแบบของ ส่วนมากการอธิบายมักจะอยู่ในรูป ของความสัมพันธ์ ระหว่างเหตุผล เมื่อปรากฏผลออกมาในรูปแบบของ ปัญหาอย่างนี้จะไรควรเป็นเหตุหรือ สาเหตุของการเกิดผล 4. ขั้นของการทำนายผล เมื่อเราแปลเหตุเป็นขั้นตอนของการ ตั้งสมมติฐานเพื่อจะทดสอบดูว่า คำอธิบายขั้นที่ 3 ว่าถูกต้องมากน้อย เพียงใด และยังเป็นการคาดคะเนผล ของสาเหตุต่าง ๆ ทั้งนี้เพื่อฝึกให้ นักเรียนคิดอย่างรอบคอบ การเรียน ที่สำคัญในขั้นนี้คือ การเรียนรู้วิธี การแก้ปัญหาโดยนำหลักการที่ เรียนรู้ในขั้นที่ 3 มาใช้ ทฤษฎีที่ตั้งขึ้น	3. ขั้นของการอธิบายปัญหาโดย ปฏิบัติกิจกรรม หมายถึง ขั้นที่ผู้สอนให้ นักเรียนรวบรวมข้อมูล จากการวิเคราะห์ องค์ประกอบของ ปัญหาเพื่อนำมาใช้ใน การแก้ปัญหา ซึ่งใน ขั้นนี้ผู้สอนจะคอย กระตุ้นให้นักเรียน ค้นหาคำตอบโดยอาศัย ความสามารถในการให้ เหตุผลมาอธิบาย แนวคิดหรือวิธี การได้มาซึ่งคำตอบ ของปัญหา		

ตารางที่ 2-3 (ต่อ)

Suchman	Bruner	Bell	วิทิต สุรัตน์เรืองชัย	วัฒนพร ระงับทุกข์	กรมวิชาการ	สุวิทย์ และ อรทัย มูลคำ	ผู้วิจัย
1962	1966	1978	2540	2542	2544	2545	
3. ชิ้นวิจารณ์กระบวนการ กระบวนกร สืบสอบ ในขั้น นี้ผู้สอนจะช่วยเหลือ วิจารณ์ว่า ผู้เรียนควร ปรับปรุง การถาม อย่างไรบ้าง และขั้นตอนใด ควรปรับปรุง แก้ไขอย่างไร	3. ชิ้นทำนายหรือคาดคะเน นักเรียนสามารถจับ เค้าโครงของปัญหาได้ ชัดเจน สามารถคาด คะเนได้ว่า ถ้าสาเหตุ เช่นเดียวกันอีก จะเกิด อะไรตามมา แม้ว่าไม่ มีสถานการณ์ปรากฏ ให้เห็นจริง	4. ชิ้นพยากรณ์และทดสอบ เป็นขั้นที่นำข้อมูลที่ได้ มาอภิปรายปัญหา และนำไปสู่ข้อสรุป เป็นขั้นเชิงคิด การค้นพบ การแก้ ปัญหาในขั้นนี้เป็น การสร้างหลักการและ ความสัมพันธ์ต่าง ๆ แยกแยะโครงสร้าง และนำไปสู่ข้อสรุป	4. ชิ้นสรุปเป็นขั้นตอนการสรุปผล การทดลอง หรือศึกษาค้นคว้าว่า คำตอบที่ทานาอไว้ ถูกหรือผิดและสรุป เป็นความรู้ใหม่ต่อไป	5. ชิ้นสร้างข้อสรุปให้นักเรียนสรุปว่า ปัญหานั้นมีคำตอบ หรือข้อสรุปอย่างไร รายงานหรือเอกสาร			4. ชิ้นสรุป หมายถึง ขั้นที่นักเรียนสรุปเกี่ยวกับ คำตอบหรือข้อสรุปของ ปัญหา
4. ชิ้นควบคุมและสร้างสรรค์ คือขั้นที่สามารถนำแนวคิดที่ได้รับ ไปใช้ใน การแก้ปัญหาเกี่ยวกับ สถานการณ์อื่น ๆ ได้ อย่างถูกต้อง	5. ชิ้นนำไปใช้ เป็นขั้นที่นำเอาความรู้ ที่ค้นพบไปใช้ ให้เกิดประโยชน์ ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับ สถานการณ์อื่น ๆ ได้ อย่างถูกต้อง	5. ชิ้นควบคุมและสร้างสรรค์ เป็นการส่งเสริมให้นักเรียน นำหลักการ กฎเกณฑ์และ วิธีการแก้ปัญหา มาปฏิบัติ ใช้ในชีวิตจริง ต่าง ๆ ได้อย่างกว้างขวาง	5. ชิ้นการประยุกต์ใช้ หมายถึง ขั้นที่ให้นักเรียน นำหลักการ กฎเกณฑ์ และ วิธีการแก้ปัญหา ไปใช้แก้ ปัญหาในสถานการณ์อื่น ๆ				

จากการศึกษาค้นคว้าจากนักการศึกษาข้างต้นสรุปได้ว่า ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนมีหลายขั้นตอน แต่ละขั้นตอนไม่ยุ่งยากและซับซ้อนมากเกินไป ผู้สอนสามารถนำมาใช้ในการจัดการเรียนรู้ให้นักเรียนได้ตามความเหมาะสม ซึ่งผู้วิจัยได้สังเคราะห์เป็นขั้นตอน 5 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นเตรียมความพร้อม หมายถึง ขั้นการเตรียมความพร้อมทางการเรียนให้กับนักเรียน โดยผู้สอนทำการทบทวนและเชื่อมโยงความรู้เดิมเข้ากับความรู้ใหม่ ด้วยการใช้คำถามนำ
2. ขั้นการสังเกต หมายถึง ขั้นที่ผู้สอนนำเสนอโจทย์หรือสถานการณ์ปัญหาที่ทำทลายความคิดของนักเรียนและให้นักเรียนสังเกตโจทย์หรือสถานการณ์ที่เป็นปัญหานั้น และวิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหา
3. ขั้นการอธิบายและปฏิบัติกิจกรรม หมายถึง ขั้นที่ผู้สอนให้นักเรียนรวบรวมข้อมูลจากการวิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหาเพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งในขั้นนี้ผู้สอนจะคอยกระตุ้นให้นักเรียนค้นหาคำตอบ โดยอาศัยความสามารถในการให้เหตุผลมาอธิบายแนวคิดหรือวิธีการได้มาซึ่งคำตอบของปัญหา
4. ขั้นสรุป หมายถึง ขั้นที่นักเรียนสรุปเกี่ยวกับคำตอบหรือข้อสรุปของโจทย์หรือสถานการณ์ปัญหา
5. ขั้นการประยุกต์ใช้ หมายถึง ขั้นที่ให้นักเรียนนำหลักการ กฎเกณฑ์ และวิธีการแก้ปัญหาไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์อื่น ๆ

บทบาทของครูในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

มีผู้กล่าวถึงบทบาทของครูในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ดังนี้

Callahan et al. (1998, pp. 261-262) ได้กล่าวถึงบทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ซึ่งสรุปไว้ดังนี้

1. ครูมีหน้าที่ให้คำแนะนำกับนักเรียนมากกว่าบอกให้นักเรียนทำตาม
2. ครูตั้งคำถาม เลือกประเด็นที่น่าสนใจเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนคิดและพยายามค้นหาคำตอบ
3. ในขณะที่นักเรียนค้นหาคำตอบ ครูควรแนะนำในการค้นพบโดยหาความชัดเจนกับปัญหา
4. ครูพยายามสร้างบรรยากาศในชั้นเรียนที่ส่งเสริมการสร้างข้อคาดเดา การตั้งข้อสงสัย และการคิดแก้ปัญหา
5. สนับสนุนให้นักเรียนตั้งสมมุติฐานและเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ตรวจสอบสมมุติฐานของนักเรียน

6. ช่วยนักเรียนในการวิเคราะห์และประเมินความคิดของตนเองเปิดโอกาสให้มีการอภิปรายเปิดในชั้นเรียน และพยายามกระตุ้นให้นักเรียนพยายามคิดโดยไม่มีการข่มขู่ เมื่อคำตอบไม่เป็นไปตามที่คาดหวัง

สุพิน บุญชูวงศ์ (2538, หน้า 57) กล่าวว่าในการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ครูเป็นผู้แนะแนวทาง คอยให้ความช่วยเหลือและสร้างสถานการณ์ เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ ฉะนั้นครูควรมีบทบาท 3 ประการ คือ

1. ป้อนคำถามนักเรียนเพื่อไปสู่การค้นคว้า ครูจะต้องรู้จักการป้อนคำถามจะต้องรู้ว่าคำถามอย่างไรนักเรียนจึงเกิดความคิด
2. เมื่อได้ตัวปัญหาแล้วให้นักเรียนตั้งขั้นอภิปรายวางแผนการแก้ปัญหา กำหนดวิธีแก้ปัญหาเอง
3. ถ้าปัญหาโดยยากเกินไป นักเรียนไม่สามารถวางแผนแก้ปัญหาได้ ครูกับนักเรียนอาจร่วมกันหาทางแก้ปัญหาค่อยไป

กรมวิชาการ (2544, หน้า 36) เสนอว่า บทบาทของครูในการสอนแบบสืบสวนสอบสวนไว้ดังนี้

1. ครูต้องจัดสภาพแวดล้อม สถานการณ์หรือสิ่งเร้าต่างๆ ที่เป็นปัญหาให้นักเรียนได้ฝึกสังเกต เปรียบเทียบ จนเห็นปัญหาและเกิดความสงสัยใคร่รู้
2. ครูกระตุ้นให้นักเรียนหาสาเหตุของปัญหานั้นด้วยการตั้งคำถาม
3. ให้ผู้เรียนตั้ง สมมุติฐานเชิงทำนายแล้ว พิสูจน์ แล้วให้นักเรียนช่วยกันสรุป
4. ครูส่งเสริมให้นักเรียนนำหลักการและนำหลักการที่ค้นพบไปใช้ในการแก้ปัญหา เพื่อให้เกิดการควบคุมและสร้างสรรค์สิ่งแวดล้อมในสภาพการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างกว้างขวาง

สุวิทย์ มูลคำ และ อรทัย มูลคำ (2545, หน้า 145-147) กล่าวถึง บทบาทของผู้สอนในการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวน ไว้ดังนี้

1. กระตุ้นให้นักเรียนมีความสนใจ คิดปัญหา วางแผนและแก้ปัญหาอย่างมีขั้นตอนและมีเหตุผลในตัวเอง
2. กระตุ้นให้นักเรียนหาวิธีการแก้ปัญหาหลาย ๆ วิธี และใช้ทักษะกระบวนการทางวิทยาศาสตร์ช่วยในการแก้ปัญหา
3. เสริมแรงหรือให้กำลังใจแก่นักเรียน
4. ช่วยเหลือ แนะนำ กำกับอย่างใกล้ชิด ตลอดจนเป็นผู้อำนวยความสะดวก เพื่อให้กระบวนการเรียนรู้ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย
5. จัดเตรียมแหล่งการเรียนรู้ที่สำคัญให้แก่ นักเรียน

6. จัดบรรยากาศและสภาพแวดล้อมให้เอื้อต่อการเรียนรู้ของนักเรียน

7. เป็นผู้ให้ข้อมูลย้อนกลับทั้งข้อดีและข้อบกพร่องแก่นักเรียน

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า บทบาทที่สำคัญของครูผู้สอนในการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน มีดังต่อไปนี้

1. ครูผู้สอนต้องจัดเตรียมแหล่งการเรียนรู้ที่สำคัญ สภาพแวดล้อม สถานการณ์หรือสิ่งเร้าต่างๆ ที่เป็นปัญหาให้นักเรียนได้ฝึกสังเกต เปรียบเทียบ จนเห็นปัญหาและเกิดความสงสัยใคร่รู้

2. ครูผู้สอนกระตุ้นให้นักเรียนหาสาเหตุของปัญหานั้นด้วยการตั้งคำถามและเลือกประเด็นที่น่าสนใจเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนคิดและพยายามค้นหาคำตอบ

3. ครูผู้สอนกระตุ้นให้นักเรียนหาวิธีการแก้ปัญหาหลาย ๆ วิธี และช่วยในการแก้ปัญหา

4. ครูผู้สอนกระตุ้นให้นักเรียนมีความสนใจ คิดปัญหา วางแผนและแก้ปัญหาอย่างมีขั้นตอนและมีเหตุผลในตัวเอง

5. ครูผู้สอนส่งเสริมให้นักเรียนนำหลักการและนำหลักเกณฑ์ที่ค้นพบไปใช้ในการแก้ปัญหา เพื่อให้เกิดการควบคุมและสร้างสรรค์สิ่งแวดล้อมในสภาพการณ์ต่างๆ ได้อย่างกว้างขวาง

6. ครูผู้สอนช่วยเหลือ แนะนำ กำกับอย่างใกล้ชิด ตลอดจนเป็นผู้อำนวยความสะดวก เพื่อให้กระบวนการเรียนรู้ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อยรวมทั้งเสริมแรงหรือให้กำลังใจแก่นักเรียน

ข้อดีและข้อจำกัดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

นักการศึกษาและนักวิชาการ ได้กล่าวถึงข้อดีและข้อจำกัดของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ดังนี้

สมชาย ชูชาติ (2538, หน้า 82) กล่าวถึงข้อดีและข้อจำกัดของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนไว้ดังนี้

ข้อดี

1. นักเรียนเป็นศูนย์กลางในการเรียนการสอนเพราะเขาจะต้องกำกับการเรียนการสอนด้วยตนเอง ดังนั้นบทบาทของนักเรียนจึงเป็นผู้มีความกระฉับกระเฉง ไม่เป็นผู้ที่เฉื่อยชาต่อไป

2. เป็นการเรียนโดยการเน้นด้วยปัญหาจะมีประโยชน์ต่อนักเรียนในแง่ที่ว่าฝึกให้เขาเป็นผู้ที่รู้จักลักษณะวิธีการแก้ปัญหา

3. เป็นการเรียนที่ฝึกทักษะและความสามารถในการตัดสินใจ

4. บทบาทของครูผู้สอนเปลี่ยนจากผู้บอกมาเป็นผู้ถาม ซึ่งวิธีการดังกล่าวจะทำให้ นักเรียนกระตือรือร้นมากขึ้น

5. เป็นการยอมรับเจตคติของนักเรียนแต่ละคน โดยเฉพาะในเรื่องค่านิยมและเจตคติของ นักเรียน เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้พัฒนาค่านิยมและเจตคติไปในด้านที่ดีด้วย

6. บทบาทของครูผู้สอนเปลี่ยนแปลงไป ไม่เป็นผู้ควบคุมการเรียนการสอน กลายเป็น นักเรียนไปกับนักเรียนด้วย

7. ไม่ส่งเสริมการเรียนในเชิงแข่งขันเพื่อคะแนนแต่นักเรียนสามารถเรียนไปโดยมุ่งที่จะ บรรลุเป้าหมายของตนเอง

ข้อจำกัด

1. ในกรณีที่นำการสอนแบบสืบสวนสอบสวนมาใช้กับกลุ่มนักเรียนที่มีใช้รายบุคคล แล้วนักเรียนอาจไม่มีโอกาสร่วมกิจกรรมทุกคน มีนักเรียนเพียงบางคนที่มีโอกาสในการแสดงความคิดเห็น การตัดสินใจ

2. การสอนแบบสืบสวนสอบสวนนั้นเป็นวิธีที่มุ่งให้นักเรียนคิดอย่างมีเหตุผล วิธีการดังกล่าวต้องใช้เวลาพอสมควร แต่การสอนในชั้นเรียนส่วนใหญ่ ผู้สอนมักมีแนวโน้มที่จะ เร่งรัดคำตอบหรือข้อโต้ตอบของนักเรียนเสมอ

3. ในบางครั้งนักเรียนเกิดความรู้สึกว่าปัญหาหรือประเด็นที่ผู้สอนหยิบยกขึ้นมาเพื่อ การสืบเสาะหาความรู้ นั้น แท้จริงแล้วผู้สอนมีคำตอบอยู่ในใจไว้ก่อนซึ่งดูเหมือนว่านักเรียนถูก ตระล่อมให้ไปทำตามสิ่งที่ผู้สอนคิดไว้แล้ว

วิชิต สุรัตน์เรืองชัย (2540, หน้า 82) กล่าวถึง ข้อดีและข้อด้อยของการจัดการเรียนรู้ แบบสืบสวนสอบสวน ไว้ดังนี้

ข้อดี

1. ฝึกการคิดหาเหตุผลให้แก่ นักเรียน
2. บรรยากาศคึกคัก น่าสนใจ

ข้อจำกัด

1. เตรียมสถานการณ์ที่จะก่อให้เกิดปัญหาให้แก่ นักเรียนลำบาก เพราะต้องควบคุม ให้นักเรียนเกิดข้อสงสัยในปัญหาที่กำหนดไว้แล้ว
2. ใช้เวลาเรียนมาก ครูผู้สอนต้องใช้ความอดทนเพื่อ ตระล่อมกล่อมเกลานักเรียน
3. ต้องใช้อุปกรณ์การสอนมาก

ไสว พักขาว (2544, หน้า 102-103) กล่าวถึง ข้อดีและข้อจำกัดของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนไว้ดังนี้

ข้อดี

1. นักเรียนได้มีส่วนร่วมคิดอย่างมีเหตุผล และสรุปความรู้ด้วยตนเอง
2. นักเรียนได้ฝึกการแก้ปัญหา
3. ส่งเสริมการแสดงออกของนักเรียน
4. สร้างบรรยากาศที่เป็นกันเองระหว่างนักเรียนกับผู้สอน

ข้อจำกัด

1. ใช้เวลาในการสอนมาก
2. เหมาะสำหรับวิชาที่ต้องให้เหตุผล

ศุวิทย์ มูลคำ และ อรทัย มูลคำ (2545, หน้า 148-150) กล่าวถึง ข้อดีและข้อจำกัดของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ไว้ดังนี้

ข้อดี

1. นักเรียนได้รู้วิธีค้นหาความรู้และการแก้ปัญหาด้วยตนเอง
2. ความรู้ที่ได้มีคุณค่า มีความหมายสำหรับนักเรียน เป็นประโยชน์และจดจำได้นาน สามารถเชื่อมโยงความรู้และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้
3. เป็นวิธีการที่ทำให้นักเรียนเกิดแรงจูงใจในการเรียนรู้ มีความอิสระ มีชีวิตชีวา และสนุกสนานกับการเรียนรู้
4. ทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิธีและกระบวนการทางวิทยาศาสตร์

ข้อจำกัด

1. ใช้เวลามากในการเรียนรู้แต่ละครั้ง บางครั้งอาจได้สาระการเรียนรู้ไม่ครบถ้วนตามที่กำหนด
2. ถ้าปัญหาหรือสถานการณ์ง่ายหรือยากเกินไป ไม่เข้าใจหรือไม่น่าสนใจจะทำให้นักเรียนเกิดการเบื่อหน่ายไม่ยอมเรียน
3. เป็นวิธีการที่มีการลงทุนสูง ซึ่งบางครั้งอาจได้ผลไม่คุ้มค่ากับการลงทุน
4. ผู้สอนต้องใช้เวลาในการวางแผนมาก

จากที่กล่าวมาข้างต้นอาจสรุปได้ว่า ในการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนมีทั้งข้อดี และข้อจำกัดอยู่หลายประการ ผู้วิจัยจึงสรุปข้อดีและข้อจำกัดของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนไว้ดังนี้

ข้อดี

1. นักเรียนเป็นศูนย์กลางในการเรียนรู้ มีส่วนร่วมคิดแก้ปัญหา และสรุปความรู้ด้วยตนเอง ดังนั้น บทบาทของนักเรียนจึงเป็นผู้มีความกระตือรือร้นไม่เป็นผู้ที่เฉื่อยชาต่อไป
2. เป็นการเรียนรู้ โดยการเน้นด้วยปัญหาจะมีประโยชน์ต่อนักเรียนในแง่ที่ว่าฝึกให้เขาเป็นผู้ที่รู้จักลักษณะวิธีการแก้ปัญหา
3. เป็นวิธีการที่ทำให้นักเรียนเกิดแรงจูงใจในการเรียนรู้ มีความอิสระ มีชีวิตชีวา และสนุกสนานกับการเรียนรู้
4. ความรู้ที่ได้มีคุณค่า มีความหมายสำหรับนักเรียน เป็นประโยชน์และจดจำได้นาน สามารถเชื่อมโยงความรู้และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้
5. บทบาทของครูผู้สอนเปลี่ยนแปลงไป ไม่เป็นผู้ควบคุมการเรียนการสอน กลายเป็นนักเรียนไปกับนักเรียนด้วย
6. บทบาทของครูผู้สอนเปลี่ยนจากผู้บอกมาเป็นผู้ถาม ซึ่งวิธีการดังกล่าวจะทำให้ นักเรียนกระตือรือร้นมากขึ้น
7. ไม่ส่งเสริมการเรียนในเชิงแข่งขันเพื่อคะแนน แต่นักเรียนสามารถเรียนไปโดยมุ่งที่จะบรรลุเป้าหมายของตนเอง

ข้อจำกัด

1. ใช้เวลามากในการเรียนรู้แต่ละครั้ง บางครั้งอาจได้สาระการเรียนรู้ไม่ครบถ้วนตามที่กำหนด
2. ถ้าปัญหาหรือสถานการณ์ง่ายหรือยากเกินไป ไม่เร้าใจหรือไม่น่าสนใจ จะทำให้นักเรียนเกิดการเบื่อหน่ายไม่อยากเรียน
3. เป็นวิธีการที่มีการลงทุนสูง ผู้สอนต้องใช้เวลามากในการวางแผน ซึ่งบางครั้งอาจได้ผลไม่คุ้มค่ากับการลงทุน
4. ในบางครั้งนักเรียนเกิดความรู้สึกละเลยปัญหาหรือประเด็นที่ผู้สอนหยิบยกขึ้นมาเพื่อการสืบเสาะหาความรู้ นั่น แท้จริงแล้วผู้สอนมีคำตอบอยู่ในใจไว้ก่อนซึ่งดูเหมือนว่านักเรียนถูกตะล่อมให้เป็นไปตามสิ่งที่ผู้สอนคิดไว้แล้ว

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาหลายท่านและสถาบันทางการศึกษาได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

Krulik and Rudnick (1993, p. 6) กล่าวถึงความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า หมายถึง สถานการณ์ที่เป็นประโยคภาษา คำตอบจะเกี่ยวข้องกับปริมาณ ในปัญหานั้นไม่ได้ระบุวิธีการหรือการดำเนินการในการแก้ปัญหาไว้อย่างชัดเจน ผู้แก้ปัญหามust ต้องค้นหาว่าจะใช้วิธีการใดในการหาคำตอบ จึงจะทำให้ได้มาซึ่งคำตอบของปัญหา

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537, หน้า 62) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์สรุปได้ดังนี้

1. เป็นสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการคำตอบ ซึ่งจะอยู่ในรูปปริมาณหรือจำนวน หรืออธิบายให้เหตุผล

2. เป็นสถานการณ์ที่ผู้แก้ปัญหาไม่คุ้นเคยมาก่อน ไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันทีทันใด ต้องใช้ทักษะความรู้และอุปกรณ์หลาย ๆ อย่างประกอบเข้าด้วยกันจึงหาคำตอบได้

3. สถานการณ์ใดจะเป็นปัญหาหรือไม่ขึ้นอยู่กับบุคคลผู้แก้ปัญหาและเวลา สถานการณ์หนึ่งอาจเป็นปัญหาสำหรับบุคคลหนึ่งในอดีต อาจไม่เป็นปัญหาสำหรับบุคคลนั้นแล้วในปัจจุบัน

ยุพิน พิพิธกุล (2542, หน้า 5) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ว่าเป็น ปัญหาที่นักเรียนจะต้องค้นหาความจริงหรือสรุปสิ่งใหม่ที่นักเรียนไม่เคยเรียนมาก่อน มีเนื้อหาเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยกระบวนการทางคณิตศาสตร์เข้ามาแก้ปัญหา

เวชฤทธิ์ อังกะภักทรขจร (2555, หน้า 109) ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ซึ่งต้องใช้ความรู้และวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบ โดยที่ยังไม่รู้ขั้นตอนหรือวิธีการที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นในทันที

สสวท. (2555 ก, หน้า 7) เสนอว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ที่เผชิญอยู่และต้องการค้นหาคำตอบ โดยที่ยังไม่รู้วิธีการหรือขั้นตอนหรือวิธีการที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นในทันที

จากความหมายข้างต้น สรุปได้ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่ไม่คุ้นเคย ไม่เคยพบเจอมาก่อน ไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันที ซึ่งต้องใช้ความรู้ ทักษะ กระบวนการทางคณิตศาสตร์และประสบการณ์เป็นแนวทางในการแก้ปัญหา

ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาและนักวิชาการหลายท่านได้ให้ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

Polya (1980, p. 1) กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นวิธีการ ที่จะหาสิ่งที่ไม่รู้ ในปัญหา เป็นการหาวิธีการที่จะนำสิ่งที่ยุ่งยากออกไป หาวิธีการที่จะเอาชนะอุปสรรคที่เผชิญอยู่ เพื่อที่จะได้ข้อสรุป หรือคำตอบที่มีความชัดเจน แต่ว่าสิ่งเหล่านี้ไม่ได้เกิดขึ้นในทันทีทันใด

สิริพร ทิพย์คง (2545, หน้า 97) กล่าวว่า การแก้ปัญหาเป็นหัวใจของการเรียนการสอน คณิตศาสตร์ เพราะในการแก้ปัญหานักเรียนต้องใช้มี โนทัศน์ ทักษะการคิดคำนวณ หลักการ กฎ หรือสูตร

อัมพร ม้าคนอง (2548, หน้า 35-36) ได้กล่าวถึงการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า การแก้ปัญหาเป็นกระบวนการที่ซับซ้อนและเกี่ยวข้องกับความรู้ ทักษะ และความสามารถหลาย อย่าง เช่น ความรู้ในเนื้อหา ความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนการทำงาน ทักษะการคิด และความสามารถ ในการประเมินการทำงานของตนเอง นอกจากนี้ ยังเกี่ยวข้องกับประสบการณ์ เจตคติ และความเชื่อ ของผู้แก้ปัญหาคด้วย

เวชฤทธิ์ อังกะภักขจร (2555, หน้า 109) กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการในการหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้แก้ปัญหาคจะต้องประยุกต์ใช้ ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน กระบวนการแก้ปัญหา กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา และประสบการณ์ เดิมประมวลเข้ากับสถานการณ์ใหม่ที่กำหนดให้ในปัญหานั้น ๆ

สสวท. (2555 ก, หน้า 7) เสนอว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการ ในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหา และ ประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

จากที่กล่าวมาข้างต้นสามารถสรุปความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ว่า หมายถึง การประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน กระบวนการแก้ปัญหาเพื่อนำไปใช้ในการหา คำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

ความหมายของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาหลายท่านและสถาบันทางการศึกษาได้ให้ความหมายของความสามารถ ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

อัมพร ม้าคนอง (2553, หน้า 39) กล่าวว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของผู้เรียนรวมถึงความสามารถต่อไปนี้

1. ใช้ความรู้คณิตศาสตร์ในการทำความเข้าใจปัญหา และวิเคราะห์แนวทางการแก้ปัญหา
2. ประเมินการแก้ปัญหาที่ใช้ว่าเหมาะสมและมีประสิทธิภาพเพียงใด และประเมินความสมเหตุสมผลหรือความถูกต้องของคำตอบที่ได้
3. พิสูจน์และแปลความหมายผลที่ได้จากการแก้ปัญหาโดยคำนึงถึงปัญหาเดิม
4. พัฒนาและใช้กลวิธีแก้ปัญหาที่หลากหลาย โดยเน้นปัญหาหลายขั้นตอนและปัญหาที่ไม่คุ้นเคย
5. ปรับเปลี่ยนและขยายความเกี่ยวกับวิธีการแก้ปัญหา ใช้แนวคิดในการหาคำตอบและกลวิธีแก้ปัญหากับปัญหาใหม่

สสวท. (2555 ข, หน้า 77) เสนอว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถในการประยุกต์ความรู้ ขั้นตอน หรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์ กลวิธีและยุทธวิธีแก้ปัญหา และประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์มักเป็นปัญหาที่ผู้เรียนไม่คุ้นเคยมาก่อน และต้องใช้ความคิดที่หลากหลาย เช่น คิดวิเคราะห์ คิดเชื่อมโยง คิดเชิงตรรกะ เพื่อหาแนวทางหรือวิธีการแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด

จากที่กล่าวมาข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหาเพื่อนำไปใช้ในการหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

ความสำคัญของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษาและผู้ที่เกี่ยวข้องได้กล่าวถึงความสำคัญของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

Kennedy and Tipps (1994, p. 135) กล่าวว่า การแก้ปัญหาเป็นสิ่งสำคัญสามารถใช้เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้แนวคิดและทักษะต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์

สิริพร ทิพย์คง (2537, หน้า 97) กล่าวว่า การแก้ปัญหาเป็นหัวใจของวิชาคณิตศาสตร์ การสอนคณิตศาสตร์มีประโยชน์มากในการช่วยส่งเสริมความคิดอย่างมีเหตุผลและมีระเบียบแบบแผน ซึ่งสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาประเภทต่าง ๆ และมีความเชื่อว่าทักษะในการแก้ปัญหามีความสำคัญต่อชีวิตและสามารถสร้างให้เกิดขึ้นได้ เพราะการสอนให้นักเรียนรู้จักแก้ปัญหาจะช่วยให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล มีระเบียบขั้นตอนในการคิด รู้จักการตัดสินใจที่ถูกต้องและเป็นนักแก้ปัญหาที่ดี

สวท. (2555 ก, หน้า 6) เสนอว่า การแก้ปัญหาเป็นกระบวนการที่นักเรียนควรจะเรียนรู้ และพัฒนาให้เกิดทักษะขึ้นในตัวนักเรียน การเรียนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้เด็กนักเรียน มีแนวคิดที่หลากหลาย มีนิสัยกระตือรือร้นไม่ย่อท้อ และมั่นใจในการแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ ตลอดจน เป็นทักษะพื้นฐานที่นักเรียนสามารถนำติดตัวไปใช้ในชีวิตประจำวันได้ตลอดชีวิต

ศศิธร แม้นสงวน (2555, หน้า 169) กล่าวว่า การแก้ปัญหาเป็นพื้นฐานสำคัญในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ครูจะต้องจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้ฝึกฝน การแก้ปัญหาอย่างสม่ำเสมอเพื่อจะช่วยให้เด็กนักเรียนสามารถเผชิญกับสถานการณ์ของปัญหาที่แตกต่างกันออกไป

อัมพร ม้าคนอง (2553, หน้า 39) กล่าวว่า การแก้ปัญหาเป็นทักษะที่มีความสำคัญยิ่ง และมักรวมทักษะอื่น ๆ ที่สำคัญเข้าไว้ด้วยกัน เช่น การให้เหตุผล การสื่อสาร และการตัดสินใจ ผู้ที่มีทักษะการแก้ปัญหาที่ดีมักมีความรู้ ประสบการณ์ ระบบการคิด และการตัดสินใจที่ดีพอ

จากที่กล่าวมาข้างต้นสามารถสรุปความสำคัญของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ว่าการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้เด็กนักเรียนมีระเบียบขั้นตอนในการคิด มีแนวคิดที่หลากหลาย และรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล รู้จักการตัดสินใจที่ถูกต้องและเป็นนักแก้ปัญหาที่ดีและมั่นใจในการแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ ตลอดจนเป็นทักษะพื้นฐานที่นักเรียนสามารถนำติดตัวไปใช้ในชีวิตประจำวันได้

กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษาคณิตศาสตร์ได้เสนอกระบวนการหรือขั้นตอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้ Clyde (1967 อ้างถึงใน ชมขนาด เชื้อสุวรรณทวี, 2544, หน้า 125) ได้แบ่งขั้นตอนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้นตอน คือ

1. ขั้นเข้าใจปัญหา
2. ขั้นค้นหาสิ่งที่ต้องการใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งนักเรียนสามารถแยกแยะได้ว่าข้อมูลที่ให้มาบางอย่างอาจไม่เกี่ยวข้องกับการหาคำตอบ หรือบางอย่างจำเป็นต้องใช้แต่ขาดหายไป จึงจำเป็นต้องหามาเพิ่มเติมเอง
3. ขั้นดูความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่าง ๆ ในขั้นนี้ผู้แก้ปัญหามองหาว่าข้อมูลต่าง ๆ เกี่ยวข้องสัมพันธ์กันอย่างไร มองเห็นว่าต้องใช้การดำเนินการใดจึงจะได้คำตอบขั้นนี้ถือว่าเป็นขั้นให้เหตุผลที่แท้จริง นักเรียนที่จะประสบผลสำเร็จในขั้นนี้จะต้องสามารถมองเห็นข้อขัดแย้ง มีความสามารถวางแผนแก้ปัญหาและให้เหตุผล
4. ขั้นคิดคำนวณ ขั้นนี้ไม่ใช่เพียงแต่นักเรียนจะ บวก ลบ คูณ และหารเป็นเท่านั้นแต่จะต้องมีทักษะเป็นอย่างดี

Leblance (1977, pp. 17-25) ได้กล่าวถึงลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้น สรุปได้ดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหาว่าอะไรคือข้อมูลหรือเงื่อนไขที่ให้มีมาและปัญหาถามหาอะไร
2. วางแผนในการแก้ปัญหาโดยใช้ความรู้และประสบการณ์ที่จำเป็น
3. แก้ปัญหาตามที่ได้วางแผนไว้ ถ้าแผนที่วางไว้ไม่นำไปสู่คำตอบก็ต้องย้อนกลับไปทำ

ขั้นที่ 2 เพื่อวางแผนใหม่

4. ทบทวนปัญหาและคำตอบ

Krulik and Reys (1980, pp. 280-281) ได้เสนอขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นที่พิจารณาว่าข้อมูลหรือเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ นั้นมีอะไรบ้าง สิ่งที่โจทย์บอกมานั้นเพียงพอสำหรับการแก้ปัญหาหรือไม่ และสิ่งที่โจทย์ถามคืออะไร
2. วางแผนในการแก้ปัญหา เป็นขั้นที่หาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่โจทย์บอกกับสิ่งที่โจทย์ถาม ค้นหาทฤษฎี กฎ สูตร บทนิยาม เพื่อนำมาใช้วางแผนในการแก้ปัญหา
3. ดำเนินการตามแผน เป็นขั้นที่ดำเนินการตามแผนที่วางไว้
4. ตรวจสอบ เป็นขั้นที่ตรวจสอบการดำเนินการแก้ปัญหาทั้งหมด และได้ผลเป็นไปตามที่ต้องการครบถ้วนหรือไม่

Polya (1985 อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2547, หน้า 41) ได้เสนอ กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เพื่อให้นักเรียนเข้าใจปัญหาอย่างถ่องแท้ มีการวางแผนและดำเนินการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบและมีประสิทธิภาพ ทำให้ได้คำตอบที่ถูกต้องหรือผลเฉลยที่เป็นเหตุเป็นผลจากการแก้ปัญหา ขั้นตอนของกระบวนการดังกล่าวมี 4 ขั้นตอน ดังนี้

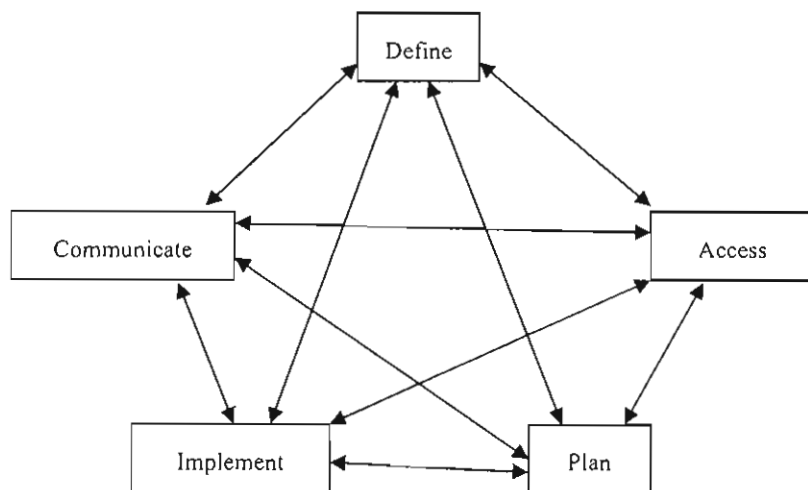
ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจปัญหา ขั้นนี้เป็นขั้นการวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหา โดยอาจหาว่าสิ่งที่ต้องการทราบคืออะไร มีข้อมูลอะไรบ้าง เงื่อนไขคืออะไร จะแก้ปัญหามาตามเงื่อนไขได้หรือไม่ เงื่อนไขที่ให้มีมาเพียงพอที่จะหาสิ่งที่ต้องการหรือไม่ ในขั้นนี้ การวาดภาพ การใช้สัญลักษณ์ การแบ่งเงื่อนไขออกเป็นส่วนย่อย ๆ อาจช่วยให้เข้าใจปัญหาคีขึ้น

ขั้นที่ 2 การวางแผนงาน ขั้นนี้เป็นขั้นการเชื่อมโยงระหว่างข้อมูลในปัญหากับสิ่งที่ต้องการทราบ หากไม่สามารถเชื่อมโยงได้ทันทีอาจต้องใช้ปัญหาอื่นช่วยเพื่อให้ได้แผนงานแก้ปัญหาในที่สุด ผู้แก้ปัญหามักจะเริ่มคิดด้วยการคิดว่าตนเคยเห็นปัญหาลักษณะนี้จากที่ไหนมาก่อนหรือไม่ หรือเคยเห็นปัญหาในรูปแบบที่คล้ายคลึงกันนี้หรือไม่ จะใช้ความรู้หรือวิธีการใดแก้ปัญหา จะแก้ปัญหาลำดับใดได้ก่อนบ้าง จะแปลงข้อมูลที่มีอยู่ใหม่เพื่อให้สิ่งที่ต้องการทราบกับข้อมูลที่มีอยู่สัมพันธ์กันมากขึ้นได้หรือไม่ ได้ใช้ข้อมูลและเงื่อนไขที่มีอยู่อย่างเหมาะสมแล้วหรือยัง

ขั้นที่ 3 การดำเนินการตามแผน ขั้นนี้เป็นขั้นการลงมือทำงานตามสิ่งที่วางไว้ และมีการตรวจสอบแต่ละขั้นย่อย ๆ ของงานที่ทำว่าถูกต้องหรือไม่ จะแน่ใจได้อย่างไร เป็นการกำกับการทำงานตามแผน

ขั้นที่ 4 การตรวจย้อนกลับ ขั้นนี้เป็นขั้นการตรวจสอบคำตอบหรือเฉลยที่ได้ว่าสอดคล้องกับข้อมูลและเงื่อนไขที่กำหนดในปัญหาหรือไม่ และมีความสมเหตุสมผลหรือไม่ ซึ่งอาจครอบคลุมถึงการขยายความคิดจากผลหรือคำตอบที่ได้ และการวิเคราะห์หาวิธีการอื่นในการแก้ปัญหา

อัมพร ม้าคนอง (2553, หน้า 42) ได้นำเสนอกระบวนการแก้ปัญหา DAPIC ที่บูรณาการกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์กับวิทยาศาสตร์ โดย DAPIC เป็นชื่อที่เกิดจากการนำตัวอักษรตัวแรกขององค์ประกอบในกระบวนการแก้ปัญหามาเรียงเป็นชื่อเรียกกระบวนการ โดยรายละเอียดของ DAPIC มีดังนี้



ภาพที่ 2-1 กระบวนการแก้ปัญหา

Define เป็นกา

รทำความเข้าใจปัญหา กำหนดหรือระบุปัญหาที่จะแก้ให้มีความชัดเจน

Access เป็นการระบุหรือเข้าถึงข้อมูลที่เกี่ยวข้องและที่จะใช้ในการแก้ปัญหา

Plan เป็นการหาวิธีที่เหมาะสมในการแก้ปัญหา และวางแผนการดำเนินงาน

Implement เป็นการนำแผนที่วางไว้มาปฏิบัติ พร้อมทั้งมีการปรับเปลี่ยนให้ดีขึ้น

Communicate เป็นการนำผลจากการดำเนินการมาวิเคราะห์ สรุปและสื่อสาร

จากที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปขั้นตอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้เป็น

4 ขั้นตอน โดยผู้วิจัยได้ปรับใช้ขั้นตอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับเนื้อหาที่ใช้

ในการวิจัยครั้งนี้ ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นการวิเคราะห์ข้อมูลว่าปัญหาถามอะไร กำหนดอะไร มาบ้าง และมีเงื่อนไขอย่างไร รวมทั้งจำแนกแยกแยะสิ่งที่เกี่ยวข้องกับปัญหาและไม่เกี่ยวข้องกับ ปัญหาออกจากกัน

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา เป็นขั้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลต่างๆ ทั้งที่เป็นสิ่งที่ กำหนดให้และข้อมูลที่เป็นผลตามมาจากสิ่งที่กำหนดให้ และเลือกวิธีการแก้ปัญหาที่เหมาะสม

3. ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นการนำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ให้เหมาะสมและแสดง การแก้ปัญหาเป็นลำดับขั้นตอน

4. ขั้นสรุปคำตอบ เป็นขั้นสรุปคำตอบว่าได้ผลเป็นไปตามที่ต้องการครบถ้วนหรือไม่

แนวทางการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษาและผู้ที่เกี่ยวข้องได้กล่าวถึงแนวทางในการจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนา ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

สิริพร ทิพย์คง (2545, หน้า 97) ได้กล่าวถึงแนวทางการพัฒนาความสามารถใน การแก้ปัญหาไว้ว่า ในการเริ่มต้นพัฒนานักเรียนให้มีทักษะกระบวนการแก้ปัญหา ผู้สอนจะต้อง สร้างพื้นฐานให้นักเรียนเกิดความคุ้นเคยกับกระบวนการแก้ปัญหาซึ่งมีอยู่ 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหาหรือวิเคราะห์ปัญหา
2. การวางแผนแก้ปัญหา
3. การดำเนินการแก้ปัญหา
4. การตรวจสอบหรือการมองย้อนกลับ

Baroody and Kilpatrick (1993; 1989 อ้างถึงใน อัมพร ม้าคอง, 2553, หน้า 47)

ได้เสนอแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาให้นักเรียนซึ่งสามารถสรุปเป็น 3 แนวทาง ดังนี้

1. การสอนผ่านการแก้ปัญหา (Teaching via problem solving) เป็นการสอนความรู้หรือ พัฒนาทักษะใด ๆ โดยใช้ปัญหาเป็นสื่อหรือเครื่องมือในการเรียนรู้ เช่น การให้ปัญหาทาง คณิตศาสตร์เพื่อให้นักเรียนวิเคราะห์ แก้ปัญหาและเรียนรู้สิ่งใหม่

2. การสอนให้แก้ปัญหา (Teaching for problem solving) เป็นการสอนที่เน้นฝึกให้ นักเรียนใช้กระบวนการแก้ปัญหากับปัญหาที่หลากหลายและมีโครงสร้างแตกต่างกัน เพื่อให้เกิด ประสบการณ์ในการแก้ปัญหามากพอที่จะสามารถนำไปประยุกต์ใช้

3. การสอนกระบวนการแก้ปัญหา (Teaching about problem solving) เป็นการสอนให้ นักเรียนเข้าใจและเรียนรู้เกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหา เทคนิค และกลวิธีการแก้ปัญหา เช่น

การสอนกระบวนการแก้ปัญหาของ Polya กระบวนการแก้ปัญหา DAPIC ที่บูรณาการกระบวนการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์กับคณิตศาสตร์

สสวท. (2555 ก, หน้า 7) เสนอว่า เพื่อให้นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับการแก้ปัญหามีประสิทธิภาพ สถานการณ์ที่จะนำมาเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ ควรเป็นสถานการณ์ที่กระตุ้นและดึงดูดความสนใจของนักเรียน ตลอดจนเป็นสถานการณ์ที่ส่งเสริมให้นักเรียนประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา และยุทธวิธีแก้ปัญหาที่หลากหลายไปใช้ในการแก้ปัญหา

จากแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า ผู้สอนจะต้องสร้างพื้นฐานให้นักเรียนเกิดทักษะความคุ้นเคยกับกระบวนการแก้ปัญหาโดยสอนให้นักเรียนเข้าใจและเรียนรู้เกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหา เทคนิค และกลวิธีการแก้ปัญหา และใช้ปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาที่ดึงดูดความสนใจของนักเรียน และเป็นสถานการณ์ที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้ประยุกต์ความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์ ไปใช้ในการแก้ปัญหา

การประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

1. เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค

การให้คะแนนแบบรูบริคเป็นเครื่องมือช่วยให้ครูพิจารณาและตัดสินระดับความสามารถของนักเรียนด้านความรู้ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ทักษะ/ กระบวนการทางคณิตศาสตร์และการประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำผลที่ได้มาใช้ในการปรับปรุงการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพดียิ่งขึ้น ตลอดจนการให้คะแนนแบบรูบริคยังเป็นเครื่องมือช่วยให้นักเรียนประเมินผลระดับความสามารถด้านคณิตศาสตร์ของตนเอง แล้วนำผลที่ได้มาปรับปรุงและพัฒนาความสามารถด้านคณิตศาสตร์ของตนเองให้ดียิ่งขึ้นด้วย (สสวท., 2555 ข, หน้า 168)

Goodrich (อ้างถึงใน เศษฐา ซาบา, 2544, หน้า 44) กล่าวถึงการสร้างเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค ดังนี้

1. กำหนดโครงร่าง คุณลักษณะที่ต้องการวัด โดยอาศัยประสบการณ์การสอนของตนเองว่าการจะผ่านจุดประสงค์การเรียนรู้จุดประสงค์หนึ่งควรมีคุณลักษณะอย่างไรบ้าง และในแต่ละลักษณะควรมีคุณภาพที่ระดับ

2. นำคุณลักษณะและระดับคุณภาพที่ต้องการประเมินชี้แจงแก่นักเรียน และใช้วิธีการระดมสมองเพื่อเพิ่มหรือตัดบางคุณลักษณะ ทั้งนี้การเพิ่มหรือตัดคุณลักษณะใดควรพิจารณาเหตุผลสนับสนุนและการยอมรับของนักเรียนส่วนใหญ่

3. เมื่อได้ระดับคุณลักษณะที่ต้องการวัดแล้วต่อมาสำสร้างระดับคุณภาพของคุณลักษณะที่ต้องการวัด

4. เมื่อได้โครงร่างอันประกอบด้วยส่วนสำคัญ 2 ส่วน คือ คุณลักษณะที่ต้องการวัดและระดับคุณภาพของแต่ละคุณลักษณะเรียบร้อยแล้ว ให้แสดงโครงร่างกับนักเรียนเพื่อถามความเห็นหรือข้อเสนอแนะอีกครั้ง

อัมพร ม้าคนอง (2553, หน้า 194-195) กล่าวว่าเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริกเป็นเกณฑ์ที่กำหนดเพื่อใช้เป็นแนวทางในการให้คะแนนผลงานหรือคุณภาพการปฏิบัติงานของนักเรียน โดยทั่วไปมี 2 แบบ ดังนี้

1. แบบเกณฑ์รวม (Holistic scoring) เป็นเกณฑ์การให้คะแนนงานหรือการแก้ปัญหา โดยพิจารณาภาพรวมของคุณภาพของผลงานที่ได้ ซึ่งอาจมองหลายมิติหรือหลายด้านรวมกัน มีการจำแนกระดับคะแนนให้เห็นความแตกต่างของคุณภาพงาน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ระดับคะแนน	คุณภาพงาน
4	แสดงวิธีทำชัดเจน และตอบถูกต้อง
3	แสดงวิธีทำชัดเจน แต่ตอบไม่ถูกต้อง
2	แสดงวิธีทำบางส่วน แต่ตอบถูกต้อง
1	แสดงวิธีทำบางส่วน แต่ตอบไม่ถูกต้องหรือไม่ตอบ
0	ไม่แสดงวิธีทำ และตอบไม่ถูกต้องหรือไม่ตอบ

2. แบบเกณฑ์ย่อยหรือเกณฑ์เฉพาะ (Analytic scoring) เป็นเกณฑ์การให้คะแนนเฉพาะขั้น เฉพาะงานย่อย หรือเฉพาะด้าน โดยกำหนดระดับคะแนนตามความแตกต่างของคุณภาพงาน งานในขั้น งานย่อย หรือด้านที่พิจารณา ดังตัวอย่าง ต่อไปนี้

ด้านวิธีการ

ระดับคะแนน	คุณภาพงาน
3	ใช้วิธีการเหมาะสม และดำเนินการถูกต้อง
2	ใช้วิธีการเหมาะสม แต่ยังไม่ดำเนินการถูกต้อง
1	ใช้วิธีการไม่เหมาะสม ทำให้การดำเนินการไม่ถูกต้อง
0	ไม่ใช้วิธีการและไม่มีการดำเนินการ

ด้านการอธิบายงาน

ระดับคะแนน	คุณภาพงาน
3	เขียนอธิบายงานทั้งหมดได้ชัดเจน และสมเหตุสมผล
2	เขียนอธิบายงานได้ชัดเจนเป็นส่วนใหญ่
1	เขียนอธิบายงานได้บางส่วน แต่ยังไม่ชัดเจน
0	เขียนอธิบายงานไม่ได้ หรือไม่เขียน

เวชฎทธี อังคะภัทรขจร (2555, หน้า 184-186) ได้เสนอ ประเภทของเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริคไว้ 2 รูปแบบ ดังนี้

1. การให้คะแนนแบบภาพรวม (Holistic scoring) เป็นการให้คะแนนที่ประเมินความรู้และผลงานของนักเรียนโดยกำหนดระดับคะแนนพร้อมบรรยายละเอียดของผลงานหรือพฤติกรรมของนักเรียนเป็นภาพรวม โดยไม่มีการแยกเป็นด้าน ๆ การให้คะแนนลักษณะนี้มักใช้ในการตัดสินหรือสรุปผลการเรียนของนักเรียน

2. การให้คะแนนแบบแยกองค์ประกอบ (Analytic scoring) เป็นการให้คะแนนตามองค์ประกอบของสิ่งที่ต้องการประเมิน เช่น เมื่อประเมินความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่องการวิเคราะห์ข้อมูล อาจแยกพิจารณาเป็นด้านการเก็บข้อมูล ด้านการนำเสนอข้อมูล และด้านการอ่านเปรียบเทียบ และวิเคราะห์แนวโน้มของข้อมูล การให้คะแนนลักษณะนี้มักใช้ในการประเมินการเรียนรู้ที่มีจุดประสงค์เพื่อวินิจฉัยหาจุดเด่นหรือจุดด้อยของนักเรียนในแต่ละด้าน

สสวท. (2555 ก, หน้า 168-170) ได้เสนอ ประเภทของเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริคไว้ 2 แบบ ดังนี้

1. การให้คะแนนแบบวิเคราะห์ (Analytic scoring) การให้คะแนนแบบวิเคราะห์ เป็นการให้คะแนนตามองค์ประกอบของสิ่งที่ต้องการประเมิน เช่น เมื่อต้องการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหา อาจแยกพิจารณาในความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา ยุทธวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบของปัญหา ในการให้คะแนนจะกำหนดเกณฑ์ของคะแนนในแต่ละด้าน แล้วรายงานผลโดยจำแนกเป็นด้าน ๆ และอาจสรุปรวมคะแนนทุกด้านด้วย

ในการสอนคณิตศาสตร์ การให้คะแนนแบบวิเคราะห์มักจะนำมาใช้ในการประเมินผลที่มีวัตถุประสงค์เพื่อวินิจฉัยหาจุดเด่นหรือจุดด้อยของนักเรียนในแต่ละด้าน แล้วนำผลของการประเมินที่มีวัตถุประสงค์เพื่อปรับปรุงการเรียนการสอนให้เหมาะสมและมีประสิทธิภาพก่อนที่นักเรียนจะเรียนเนื้อหาใหม่ต่อไป การประเมินผลโดยการให้คะแนนแบบวิเคราะห์จะมีประสิทธิภาพมากขึ้นเมื่อใช้ร่วมกับวิธีการประเมินผลอย่างอื่น เช่น การสังเกต และการใช้คำถาม

2. การให้คะแนนแบบองค์รวม (Holistic scoring) การให้คะแนนแบบองค์รวมเป็นการให้คะแนนแบบบูรณาการที่ประเมินผลงานของนักเรียน โดยการกำหนดระดับคะแนนพร้อมบรรยายละเอียดของผลงานหรือพฤติกรรมของนักเรียนที่ควรมี เป็นภาพรวมของการทำงานทั้งหมด ไม่แยกแยะเป็นด้าน ๆ

ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การให้คะแนนแบบองค์รวมมักนำมาใช้ในการประเมินผลที่มีวัตถุประสงค์เพื่อตัดสินหรือสรุปผลการเรียนของนักเรียน การประเมินผลโดยการให้คะแนนแบบองค์รวมเป็นการประเมินที่เหมาะสมสำหรับการประเมินที่มีพิสัยกว้าง ๆ และต้องการผลที่เป็นภาพรวมกว้าง ๆ และจะมีประสิทธิภาพมากขึ้นเมื่อใช้กับวิธีการประเมินผลอย่างอื่น เช่น การสังเกตและการใช้คำถาม

จากที่กล่าวข้างต้นสามารถสรุปได้ว่าการให้คะแนนแบบบูรณาการมี 2 แบบ คือ

1. เกณฑ์การให้คะแนนแบบภาพรวม (Holistic scoring) เป็นแนวทางการให้คะแนนโดยพิจารณาจากภาพรวมของผลงาน โดยมีการกำหนดระดับคะแนนพร้อมบรรยายละเอียดของผลงานหรือพฤติกรรมของนักเรียนที่ควรมี เป็นภาพรวมของการทำงานทั้งหมดโดยไม่แยกแยะเป็นด้าน ๆ ซึ่งผู้วิจัยได้นำเกณฑ์การให้คะแนนแบบภาพรวม (Holistic scoring) ไปใช้เป็นเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2. เกณฑ์การให้คะแนนแบบวิเคราะห์ (Analytic scoring) คือแนวทางการให้คะแนนโดยพิจารณาจากแต่ละส่วนของงาน ซึ่งแต่ละส่วนต้องกำหนดแนวทางการให้คะแนนโดยมีคำอธิบายลักษณะของงานส่วนนั้น ๆ ในแต่ละระดับไว้อย่างชัดเจน ซึ่งผู้วิจัยได้นำเกณฑ์การให้คะแนนแบบวิเคราะห์ (Analytic scoring) ไปใช้เป็นเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

2. เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

สสวท. (2555 ข, หน้า 82) ได้เสนอตัวอย่างพฤติกรรมที่แสดงออกในด้านทักษะความสามารถในการแก้ปัญหา ดังนี้

- ทำความเข้าใจปัญหา โดยระบุประเด็นปัญหา กำหนดตัวแปร
- สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นไปได้
- ดำเนินการวางแผนและลงมือแก้ปัญหา
- ตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบ
- ตรวจสอบความถูกต้องและความเป็นไปได้ของการแก้ปัญหา
- ตรวจสอบขั้นตอนการแก้ปัญหา
- ตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของคำตอบ

สิริพร ทิพย์คง (2545, หน้า 219-220) ได้เสนอเกณฑ์การให้คะแนนการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งแบ่งการให้คะแนนตามขั้นตอนการแก้ปัญหา ดังตารางที่ 2-4

ตารางที่ 2-4 เกณฑ์การให้คะแนนตามขั้นตอนการแก้ปัญหาของ สิริพร ทิพย์คง

รายการประเมิน	คะแนน	เกณฑ์การพิจารณา
1. ขั้นทำความเข้าใจ โจทย์ปัญหา	0	สำหรับความเข้าใจ โจทย์ปัญหาผิด
	2	สำหรับความเข้าใจในแต่ละส่วนของ โจทย์ปัญหา
	4	สำหรับความเข้าใจใน โจทย์ปัญหาได้ถูกต้องสมบูรณ์
2. ขั้นวางแผนในการแก้ปัญหา	0	สำหรับการไม่มีความพยายามที่จะแก้ปัญหาหรือการวางแผนไม่เหมาะสม
	2	สำหรับการวางแผนการแก้ปัญหาบางส่วนได้ถูกต้อง
	4	สำหรับการวางแผนการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง ซึ่งจะนำไปสู่การได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้อง
3. การดำเนินการตามแผนและคำตอบที่ได้	0	สำหรับคำตอบที่ผิดหรือไม่มีคำตอบ
	1	สำหรับการคิดคำนวณไม่ถูกต้อง หรือยกจำนวนมาคิดไม่ถูกต้อง (ขาดความรอบคอบ ทำให้ลอกโจทย์มาคิดผิด) หรือมีบางส่วนของคำตอบถูก
	2	สำหรับการดำเนินการตามแผนถูกต้องแต่คำตอบผิด
	3	สำหรับการดำเนินการตามแผนและคำตอบที่ได้ถูกต้องสมบูรณ์

กรมวิชาการ (2546 ก, หน้า 135-137) ได้นำเสนอเกณฑ์เพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนใช้เป็นกรอบในการประเมินคุณภาพนักเรียนในด้านต่าง ๆ ดังนี้

1. ตัวอย่างเกณฑ์การให้คะแนนผลการเรียนรู้โดยการสอบ สำหรับแบบทดสอบที่เป็นอัตนัยหรือแบบความเรียงสามารถกำหนดตัวบ่งชี้และเกณฑ์ในการให้คะแนนมากกว่า 2 ระดับ เช่น อาจกำหนดคะแนนเต็มเป็น 4 คะแนนแล้วพิจารณากำหนดเกณฑ์การให้คะแนนลดหลั่นลงมา สำหรับนักเรียนที่แสดงผลการเรียนรู้ไม่ถึงเกณฑ์ที่กำหนด

ตัวอย่างเกณฑ์การให้คะแนนผลการทำข้อสอบแบบอัตนัยที่พิจารณาจากการแสดงวิธีทำในการหาคำตอบ และความถูกต้องของคำตอบ ดังตารางที่ 2-5

ตารางที่ 2-5 เกณฑ์การให้คะแนนผลการทำข้อสอบแบบอัตนัยที่พิจารณาจากการแสดงวิธีทำในการหาคำตอบ และความถูกต้องของคำตอบ ของกรมวิชาการ

คะแนน/ ความหมาย	ผลการทำข้อสอบที่ปรากฏให้เห็น
4 / ดีมาก	การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ คำตอบถูกต้อง ครบถ้วน
3 / ดี	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจนนัก แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบถูกต้อง ครบถ้วน
2 / พอใช้	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจนนัก หรือไม่แสดงวิธีทำ คำตอบถูกต้องครบถ้วน หรือ การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ แต่คำตอบไม่ถูกต้อง ขาดการตรวจสอบ
1 / ควรแก้ไข	การแสดงวิธีทำไม่ชัดเจนนัก แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดงวิธีทำ และคำตอบที่ได้ไม่ถูกต้องแต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง
0 / ต้องปรับปรุง	ทำได้ไม่ถึงเกณฑ์

2. ทักษะการแก้ปัญหา มีเกณฑ์การให้คะแนน ดังตารางที่ 2-6

ตารางที่ 2-6 เกณฑ์การให้คะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกรมวิชาการ

คะแนน/ ความหมาย	ความสามารถในการแก้ปัญหาที่ปรากฏให้เห็น
4 / ดีมาก	ใช้ยุทธวิธีดำเนินการแก้ปัญหาสำเร็จ อย่างมีประสิทธิภาพ อธิบายถึงเหตุผลในการใช้วิธีดังกล่าวได้เข้าใจชัดเจน
3 / ดี	ใช้ยุทธวิธีดำเนินการแก้ปัญหาสำเร็จ แต่น่าจะอธิบายถึงเหตุผลในการใช้วิธีได้ดีกว่านี้
2 / พอใช้	ใช้ยุทธวิธีดำเนินการแก้ปัญหาสำเร็จเพียงบางส่วน อธิบายถึงเหตุผลในการใช้วิธีดังกล่าวได้บางส่วน
1 / ควรแก้ไข	มีร่องรอยการดำเนินการแก้ปัญหบางส่วน เริ่มคิดว่าทำไมถึงใช้วิธีการนั้นแล้วหยุด อธิบายต่อไม่ได้ แก้ปัญหาไม่สำเร็จ
0 / ต้องปรับปรุง	ทำได้ไม่ถึงเกณฑ์ข้างต้นหรือไม่มีร่องรอยการดำเนินการแก้ปัญหา

สสวท. (2546, หน้า 104-105) ได้เสนอว่า การประเมินผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พิจารณาได้จากรายการประเมิน 4 องค์ประกอบ คือ ความเข้าใจปัญหา การเลือกยุทธวิธีแก้ปัญหา การใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ ทั้งนี้อาจกำหนดเกณฑ์การประเมินผลแบบ วิเคราะห์ที่แบ่งระดับคุณภาพเป็น 3 ระดับ คือ 1, 2 และ 3 นอกจากนี้ผู้สอนอาจกำหนดน้ำหนัก คะแนนของแต่ละปัญหาให้แตกต่างกันตามน้ำหนักของเนื้อหาหรือความเหมาะสม ดังตารางที่ 2-7

ตารางที่ 2-7 เกณฑ์การประเมินผลแบบวิเคราะห์ของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
ของ สสวท.

รายการประเมิน	ระดับคุณภาพ	เกณฑ์การพิจารณา
1. ความเข้าใจ ปัญหา	3 (ดี)	- เข้าใจปัญหาได้ถูกต้อง
	2 (พอใช้)	- เข้าใจปัญหาบางส่วนไม่ถูกต้อง
	1 (ปรับปรุง)	- เข้าใจปัญหาน้อยมากหรือไม่เข้าใจปัญหา
2. การเลือก ยุทธวิธี แก้ปัญหา	3 (ดี)	- เลือกวิธีการแก้ปัญหาได้เหมาะสมและเขียนประโยค คณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง
	2 (พอใช้)	- เลือกวิธีการแก้ปัญหาซึ่งอาจนำไปสู่คำตอบที่ถูกต้อง แต่ ยังมีบางส่วนผิด โดยอาจเขียนประโยคคณิตศาสตร์ไม่ ถูกต้อง
	1 (ปรับปรุง)	- เลือกวิธีการแก้ปัญหาละเอียดไม่ถูกต้อง
3. การใช้ยุทธวิธี การแก้ปัญหา	3 (ดี)	- นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้อง
	2 (พอใช้)	- นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้องเป็นบางครั้ง
	1 (ปรับปรุง)	- นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ไม่ถูกต้อง
4. การสรุป คำตอบ	3 (ดี)	- สรุปคำตอบได้ถูกต้อง บางส่วน
	2 (พอใช้)	- สรุปคำตอบที่ไม่สมบูรณ์หรือใช้สัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง
	1 (ปรับปรุง)	- ไม่มีการสรุปคำตอบ

อัมพร ม้าคอง (2546, หน้า 92-93) กล่าวว่า Analytic scoring เป็นการให้คะแนนแต่ละ
ขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหา ผู้สอนต้องกำหนดไว้ล่วงหน้าว่า จะให้ผู้เรียนทำกี่ขั้นตอน
แต่ละขั้นตอนจะให้คะแนนอย่างไร ตัวอย่างการให้คะแนนในลักษณะดังกล่าว ดังตารางที่ 2-8

ตารางที่ 2-8 การให้คะแนนโดยใช้ Analytic scoring scale กระบวนการแก้ปัญหา
ของ อัมพร ม้าคนอง

รายการประเมิน	คะแนน	เกณฑ์การพิจารณา
1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา	0	- ไม่เข้าใจปัญหาเลย
	1	- เข้าใจปัญหาเป็นบางส่วน
	2	- เข้าใจปัญหาทั้งหมด
2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา	0	- แผนการแก้ปัญหาไม่เหมาะสม
	1	- ใช้ข้อมูลจากปัญหาวางแผนการแก้ปัญหาถูกต้องบางส่วน
	2	- แผนที่วางไว้จะให้คำตอบที่ถูกต้องได้ถ้าดำเนินการถูกต้อง
3. ขั้นหาคำตอบ	0	- ไม่ได้คำตอบหรือคำตอบผิด
	1	- ได้คำตอบผิดจากการคำนวณผิดแต่มีบางส่วนถูก
	2	- คำตอบถูกต้องสมบูรณ์

สมศักดิ์ โสภณพินิจ (2547, หน้า 22-25) ได้รวบรวมแนวทางการประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์และการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ ซึ่งนำเสนอเกณฑ์การให้คะแนน 3 แบบ ดังนี้

แบบที่ 1 การให้คะแนนตามรูปแบบของวอลเตอร์ ซีเทล (Walter Szetele)

Walter Szetele เสนอการประเมินผลการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ว่า ครูควรประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก โดยใช้เกณฑ์คะแนนง่าย ๆ ดังนี้

ให้ 0 คะแนน ถ้าเด็กไม่ได้แสดงว่าคิดแก้ปัญหาได้เลย กระจายคำตอบอาจจะว่างเปล่า ไม่มีการตอบคำถาม หรือแสดงวิธีแก้ปัญหาเอาไว้อย่างไรเลย

ให้ 1 คะแนน ถ้าเด็กได้พยายามตอบคำถาม แต่คำถามที่ให้ไม่มีเหตุผล หรือตอบไม่ตรงคำถาม

ให้ 2 คะแนน ถ้าเด็กแสดงให้เห็นว่ามีความเข้าใจในตัวคำถาม สามารถตอบคำถามได้บ้างแต่ไม่สมบูรณ์ มีวิธีทำที่ยังมีความสับสนอยู่

ให้ 3 คะแนน ถ้าเด็กเข้าใจคำถามได้ดี สามารถตอบคำถามได้ถูกต้อง มีเหตุผลพอสมควร การอ้างอิงถูกต้อง แต่วิธีทำยังขาดความสมบูรณ์ ขาดความสัมพันธ์ระหว่างขั้นตอนต่าง ๆ หรือมีข้อผิดพลาดบกพร่องบ้าง

ให้ 4 คะแนน ถ้าเด็กเข้าใจคำถามดี ตอบคำถามและแสดงวิธีทำในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ มีเหตุมีผลและอ้างอิงถูกต้อง

แบบที่ 2 การให้คะแนนตามรูปแบบของแรนคอลล ชาร์ลส์ (Randall Charles)

Randall Charles ได้เสนอเกณฑ์การให้คะแนนอีกวิธีหนึ่ง ที่เรียกว่าการให้คะแนนแบบแยกส่วน (Analytic scoring scale) ในแต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 6 คะแนน ซึ่งแบ่งให้คะแนนออกเป็น 3 ตอน แต่ละตอนมีคะแนนเต็ม 2 คะแนน ดังนี้

ตอนที่ 1 การประเมินความเข้าใจปัญหา

ให้ 0 คะแนน ถ้าไม่เข้าใจปัญหาเลย

ให้ 1 คะแนน ถ้าเข้าใจปัญหาเพียงบางส่วนหรือเข้าใจไม่ถูกต้อง หรือแปลความหมายตัวปัญหาบางส่วนผิดพลาด

ให้ 2 คะแนน ถ้าเข้าใจตัวปัญหาอย่างถูกต้องสมบูรณ์

ตอนที่ 2 การวางแผนปัญหา

ให้ 0 คะแนน ถ้าไม่ได้มีความพยายามในการวางแผน หรือวางแผนไม่ถูกต้องไม่มีแนวทางในการแก้ปัญหาได้เลย

ให้ 1 คะแนน ถ้าการวางแผนมีส่วนถูกต้องอยู่บ้าง สามารถนำปัญหาบางส่วนมากำหนดเป็นขั้นตอน เพื่อใช้วิธีแก้ปัญหาได้

ให้ 2 คะแนน ถ้าสามารถวางแผนแก้ปัญหาได้เหมาะสม นำไปสู่การแก้ปัญหาได้อย่างสมบูรณ์

ตอนที่ 3 การได้คำตอบ

ให้ 0 คะแนน ถ้าไม่มีคำตอบ หรือมีคำตอบที่ผิด ๆ หลงทางเนื่องจากการวางแผนที่ผิดพลาดแต่แรก

ให้ 1 คะแนน ถ้ามีการเขียนคำตอบหรือวิธีทำที่ผิด เนื่องจากการลอกใจหัดคิดคำนวณผิด ทำให้ได้คำตอบผิด แต่มีความเข้าใจถูกต้องอยู่บ้าง คำตอบบางส่วนมีความถูกต้อง

ให้ 2 คะแนน ถ้าคำตอบถูกต้อง เขียนอธิบายวิธีทำถูกต้องสมบูรณ์

แบบที่ 3 การให้คะแนนตามรูปแบบของ Randall Charles, Frank Lester และ Phares O'Deffer

Charles, Lester and O'Deffer (1987) ได้เสนอวิธีการให้คะแนนที่เรียกว่า การให้คะแนนแบบภาพรวม (Holistic scoring scale) โดยกำหนดให้คะแนนเต็ม 4 คะแนน ถ้าสามารถแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องมากน้อยต่าง ๆ กัน จะได้คะแนนลดหลั่นกันตามส่วน ดังนี้

คะแนนที่ให้	ลักษณะของวิธีการแก้ปัญหาและคำตอบ
0	นักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหาโจทย์ได้เลย แม้จะมีรอยขีดเขียนอยู่บ้างก็ไม่ได้ใกล้เคียง หรือดูทางว่าจะนำไปสู่การแก้ปัญหาได้
1	นักเรียนมีความเข้าใจในปัญหาโจทย์ได้ถูกต้อง ได้แสดงการคิดคำนวณที่ถูกต้องบ้างเล็กน้อย แสดงให้เห็นว่าเขารู้วิธีทำที่ถูกต้อง แต่ไม่สามารถทำงานสำเร็จได้
2	มีวิธีการคำนวณที่ถูกต้อง ได้แสดงวิธีทำอย่างมีเหตุผลแต่รายละเอียดของการคิดคำนวณยังผิดอยู่ ส่วนใหญ่เป็นความผิดพลาดจากการเข้าใจผิดหรือมีความบกพร่องในขั้นตอนการคำนวณ
3	สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้เกือบถูกต้องสมบูรณ์ วิธีการถูกต้องตามขั้นตอนต่างๆ แต่มีข้อผิดพลาดบกพร่องในรายละเอียดบางประการ เช่น ไม่ได้ระบุเงื่อนไขที่จะเป็นประกอบคำอธิบาย หรือวิธีทำถูกต้องตลอดทาง แต่วิเคราะห์หรือตอบในขั้นสุดท้ายผิดพลาด
4	มีความถูกต้องทั้งวิธีทำ และรายละเอียดของการคิดคำนวณ

สสวท. (2555 ข, หน้า 127-128) เสนอว่า การประเมินผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ควรมีรายการประเมินที่แสดงถึงขั้นตอนของการแก้ปัญหา และจะต้องกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนที่มีรายละเอียดเพียงพอที่จะใช้ประเมินผู้เรียน นอกจากนี้ควรมีการบันทึกเพิ่มเติมในกรณีที่ผู้เรียน แสดงความสามารถในการมองปัญหาย้อนกลับ โดยการตรวจสอบขั้นตอนการแก้ปัญหา วิธีการแก้ปัญหาและคำตอบที่ได้ ตลอดจนการขยายผลการแก้ปัญหาให้อยู่ในรูปของหลักการทั่วไป การประเมินผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พิจารณาได้จากรายการประเมิน 4 ประเด็น คือ

- 1) ความเข้าใจปัญหา
- 2) การเลือกยุทธวิธีแก้ปัญหา
- 3) การใช้ยุทธวิธีแก้ปัญหา และ
- 4) การสรุปคำตอบ

ทั้งนี้อาจกำหนดเกณฑ์การประเมินผลแบบเกณฑ์รวมที่พิจารณาขั้นตอนการแก้ปัญหาของผู้เรียนในภาพรวม โดยกำหนดระดับคุณภาพ ดังตารางที่ 2-9

ตารางที่ 2-9 เกณฑ์การประเมินผลแบบเกณฑ์รวมของทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
ของ สสวท.

คะแนน/ ระดับคุณภาพ	เกณฑ์พิจารณา
4/ ดีมาก	<ul style="list-style-type: none"> - เข้าใจปัญหาได้ถูกต้องชัดเจน - เลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ถูกต้อง เหมาะสม สอดคล้องกับปัญหา นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้อง และแสดงการแก้ปัญหาเป็นลำดับขั้นตอนได้อย่างชัดเจน - สรุปคำตอบได้ถูกต้อง สมบูรณ์
3/ ดี	<ul style="list-style-type: none"> - เข้าใจปัญหาได้ถูกต้องชัดเจน - เลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ถูกต้อง เหมาะสม สอดคล้องกับปัญหา นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้อง แต่การแสดงลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหายังไม่ชัดเจน - สรุปคำตอบได้ถูกต้อง แต่ยังไม่สมบูรณ์
2/ พอใช้	<ul style="list-style-type: none"> - เข้าใจปัญหาบางส่วนไม่ถูกต้อง - เลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ถูกต้อง แต่ไม่เหมาะสมหรือไม่ครอบคลุมประเด็นของปัญหา นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้อง แต่การแสดงลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหายังไม่ชัดเจน - สรุปคำตอบได้ถูกต้องบางส่วน หรือสรุปคำตอบไม่ครบถ้วน
1/ ต้องปรับปรุง	<ul style="list-style-type: none"> - เข้าใจปัญหาบางส่วนไม่ถูกต้อง - เลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง และนำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดงลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหา - ไม่มีการสรุปคำตอบ หรือสรุปคำตอบไม่ถูกต้อง

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีทั้งแบบเกณฑ์การให้คะแนนแบบภาพรวมซึ่งเป็นการให้คะแนนโดยพิจารณาจากภาพรวมของกระบวนการแก้ปัญหา และเกณฑ์การให้คะแนนแบบวิเคราะห์ที่พิจารณาคะแนนตามขั้นตอนของการแก้ปัญหา ซึ่งเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยเลือกใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ปรับปรุงจากเกณฑ์การประเมินผลแบบวิเคราะห์ของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของ สสวท. (2546, หน้า 104-105) เนื่องจากเกณฑ์ดังกล่าวมีความเหมาะสมและสอดคล้องกับงานวิจัยในครั้งนี้ ซึ่งมีรายละเอียดดังตารางที่ 2-10

ตารางที่ 2-10 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยเลือกใช้ในการวิจัย

รายการประเมิน	คะแนน	เกณฑ์พิจารณา
1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา	2	- ระบุว่าปัญหามีอะไรบ้าง กำหนดอะไรมาบ้าง และมีเงื่อนไขอย่างไร ได้อย่างถูกต้อง
	1	- ระบุว่าปัญหามีอะไรบ้าง กำหนดอะไรมาบ้าง และมีเงื่อนไขอย่างไร ได้ถูกต้องบางส่วน
	0	- ระบุว่าปัญหามีอะไรบ้าง กำหนดอะไรมาบ้าง และมีเงื่อนไขอย่างไร ได้ไม่ถูกต้อง
2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา	2	- แสดงความสัมพันธ์ต่างๆจากข้อมูลหรือเงื่อนไขที่กำหนดให้ ได้ถูกต้อง และเลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ถูกต้องเหมาะสม สอดคล้องกับปัญหา
	1	- แสดงความสัมพันธ์ต่างๆจากข้อมูลหรือเงื่อนไขที่กำหนดให้ ถูกต้อง แต่เลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ไม่เหมาะสม หรือไม่ครอบคลุมประเด็นของปัญหา
	0	- แสดงความสัมพันธ์ต่างๆจากข้อมูลหรือเงื่อนไขที่กำหนดให้ ไม่ถูกต้อง หรือเลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ไม่ถูกต้อง

ตารางที่ 2-10 (ต่อ)

รายการประเมิน	คะแนน	เกณฑ์พิจารณา
3. ขั้นตอนการ ตามแผน	2	- นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้อย่างถูกต้อง และแสดง การแก้ปัญหาเป็นลำดับขั้นตอน ได้อย่างชัดเจน
	1	- นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้อย่างถูกต้อง แต่การแสดงลำดับ ขั้นตอนการแก้ปัญหายังไม่ชัดเจน หรือมีการแทนค่า หรือ คำนวณที่ผิดพลาด
	0	- นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดงลำดับ ขั้นตอนการแก้ปัญหา
4. ขั้นตอนการสรุป คำตอบ	1	- สรุปคำตอบได้ถูกต้อง สมบูรณ์
	0	- ไม่มีการสรุปคำตอบ หรือสรุปคำตอบไม่ถูกต้อง

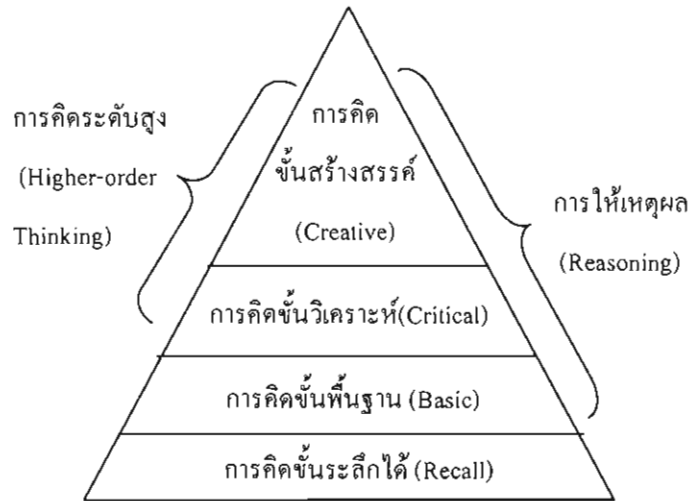
ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาและสถาบันทางการศึกษาได้ให้ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

O'Daffer (1990, p. 378) ได้ให้ทรรศนะเกี่ยวกับ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า การให้เหตุผล เป็นส่วนหนึ่งของการคิดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับการสร้างหลักการ การวิเคราะห์ และการหาข้อสรุปที่ถูกต้องสมเหตุสมผลเกี่ยวกับแนวคิดหรือการหาความสัมพันธ์กันของแนวคิด

Krulik et al. (1993, p. 3) ได้กล่าวว่า การคิดหมายถึงความสามารถของนักเรียนในการได้มาซึ่งข้อสรุปที่สมเหตุสมผลจากข้อมูลที่กำหนด ซึ่งนักเรียนต้องสร้างความคาดการณ์หาข้อสรุปจากความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหา แล้วแสดงเหตุผลพร้อมทั้งอธิบายข้อสรุปและข้อยืนยัน ข้อสรุปดังกล่าวเป็นการนำมารวมกันจนกลายเป็นความรู้ใหม่ โดย ครูลิกและรุคนิค ได้แบ่งการคิดออกเป็น 4 ชั้น คือการคิดขั้นระลึกได้ (Recall) การคิดขั้นพื้นฐาน (Basic) การคิดขั้นวิเคราะห์ (Critical) การคิดขั้นสร้างสรรค์ (Creative) ส่วนการให้เหตุผลครูลิกและรุคนิคมองว่าเป็นส่วนสำคัญของการคิดที่เหนือไปจากการคิดขั้นระลึกได้ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 2-2 แสดง 4 ขั้นตอนการคิดของครูลิขิตและรุคินิก

ซึ่งครูลิขิตและรุคินิก กล่าวไว้ว่า การคิดเป็นกระบวนการที่ซับซ้อน แต่ละขั้นตอน ที่แสดงในแผนภาพไม่ได้แยกออกจากกันทีเดียวจะเห็นว่า “การให้เหตุผล” เป็นกระบวนการของการคิดซึ่งเริ่มตั้งแต่ การคิดขั้นพื้นฐาน การคิดขั้นวิเคราะห์ และการคิดขั้นสร้างสรรค์ ซึ่งเป็นการคิดระดับสูง (Higher order thinking) เป็นการคิดที่อยู่ในขั้นวิเคราะห์และการคิดสร้างสรรค์

Artzt and Shirel (1999, p. 114) ได้กล่าวถึงการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนที่ทำให้การแก้ปัญหาสมบูรณ์ นักเรียนจะไม่สามารถเข้าใจปัญหาวิเคราะห์ปัญหาหรือวางแผนในการแก้ปัญหาได้หากปราศจากการให้เหตุผลกล่าวได้ว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จะมีความสำคัญควบคู่ไปกับการแก้ปัญหา

สมเดช บุญประจักษ์ (2540, หน้า 37) ได้ให้ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่าเป็น การแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างหลักการ หาความสัมพันธ์ของแนวคิด และการสรุปที่สมเหตุสมผลตามแนวคิดนั้น ๆ ซึ่งประกอบด้วย

1. ความสามารถในการวิเคราะห์ และระบุถึงความสัมพันธ์ของข้อมูล
2. ความสามารถในการหาข้อสรุป
3. ความสามารถในการแสดงข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปของแนวคิดอย่างสมเหตุสมผล

เวชฤทธิ์ อังกะภักทขจร (2555, หน้า 114) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการอธิบาย การหาความสัมพันธ์ การวิเคราะห์และแสดงข้อสรุปของข้อมูลอย่างสมเหตุสมผล และความสามารถในการพิจารณาข้อสรุปที่สมเหตุสมผล

สสวท. (2555 ก, หน้า 39-41) ได้ให้ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า หมายถึง กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์และ/ หรือความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ในการรวบรวมข้อเท็จจริง/ ข้อความ/ แนวคิด/ สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ แรงความสัมพันธ์ หรือการเชื่อมโยง เพื่อทำให้เกิดข้อเท็จจริงหรือสถานการณ์ใหม่

จากข้อความข้างต้นสามารถสรุปความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้ว่า หมายถึง การใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อการอธิบาย แสดงแนวคิด การอ้างอิงเหตุผลประกอบ และแสดงข้อสรุปของคำตอบที่สมเหตุสมผล

ความหมายของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาและสถาบันทางการศึกษาได้ให้ความหมายของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

Prestege (2002 อ้างถึงใน พรรรถทิพา พรหมรัถย์, 2552, หน้า 37) กล่าวว่า ความสามารถในการให้เหตุผล คือ การที่นักเรียนสามารถค้นหาคำตอบและตัดสินใจถูกต้องได้ รวมถึงพัฒนาแนวคิดเป็นข้อสรุปทั่วไป การโต้แย้งและการพิสูจน์

กรมวิชาการ (2546 ข, หน้า 9) ได้เสนอว่า ความสามารถในการให้เหตุผลเป็นความสามารถของนักเรียนในการให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างสมเหตุสมผล

พรรรถทิพา พรหมรัถย์ (2552, หน้า 37) กล่าวว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างหลักการ การวิเคราะห์ การหาความสัมพันธ์ และแสดงข้อสรุปของข้อมูลอย่างสมเหตุสมผล รวมถึงความสามารถในการพิจารณาและยืนยันข้อสรุปที่สมเหตุสมผล

อัมพร ม้าคนอง (2553, หน้า 49) กล่าวว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มีหลากหลาย ที่สำคัญมีดังนี้

1. หาข้อสรุปที่เป็นเหตุเป็นผลเกี่ยวกับคณิตศาสตร์
2. ใช้ความรู้และข้อมูลในการวิเคราะห์สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ และในการอธิบายความคิดของตนเอง
3. เข้าใจและสามารถใช้กระบวนการให้เหตุผลในสถานการณ์เฉพาะใด ๆ
4. สร้าง ทดสอบ และประเมินข้อคาดการณ์และข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์
5. ให้เหตุผลโดยใช้การอุปนัยและนิรนัยทางคณิตศาสตร์
6. ตรวจสอบและประเมินความคิดของตนเอง
7. เห็นคุณค่าและความสำคัญของการให้เหตุผลซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของคณิตศาสตร์ และสามารถนำไปใช้ได้

สสวท. (2555 ข, หน้า 79) เสนอว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถที่ต้องใช้การคิดวิเคราะห์และใช้เหตุผลในการหาข้อสรุปที่สมเหตุสมผลของ สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์จากข้อมูลที่กำหนด โดยเหตุผลที่ใช้อาจแสดงถึงแนวคิดเกี่ยวกับความรู้ ที่เป็นข้อเท็จจริง หลักการข้อคาดการณ์ หรือข้อสนับสนุนของข้อสรุปที่ได้ในสถานการณ์นั้น ๆ

จากข้อความข้างต้นสามารถสรุปความหมายของความสามารถในการให้เหตุผลทาง คณิตศาสตร์ ได้ว่าหมายถึง ความสามารถในการอธิบาย แสดงแนวคิด การอ้างอิงเหตุผล ประกอบ และแสดงข้อสรุปของคำตอบที่สมเหตุสมผล

ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษาและสถาบันทางการศึกษาได้แบ่งประเภทของการให้เหตุผลทาง คณิตศาสตร์ ดังนี้

O'Daffer (1990, p. 378) เสนอว่า ทักษะการให้เหตุผลที่มีความสำคัญต่อความสำเร็จ ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมี 2 ประเภท

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลทาง คณิตศาสตร์ซึ่งเน้นการใช้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับการอธิบายสมบัติและ โครงสร้างหลักการใหม่ค้นหา รูปทั่วไป รูปแบบทางคณิตศาสตร์ วิเคราะห์สถานการณ์ และในการอธิบายสมบัติและ โครงสร้างต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การสรุปเป็นมโนคติหรืออาจกล่าวได้ว่า การให้เหตุผลแบบอุปนัย เกิดจากผลของกรณีเฉพาะหลาย ๆ กรณี แล้วนำไปสู่การสรุปเป็นกฎเกณฑ์ทั่วไป

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลทาง คณิตศาสตร์ซึ่งเน้นการใช้ข้อความ หรือแบบรูปที่เป็นจริงสมเหตุสมผลอยู่แล้ว เพื่อนำไปสู่ข้อสรุป จากหลักฐานที่ปรากฏเป็นการพิสูจน์ข้อสรุปและตัดสินความถูกต้องของขั้นตอนการคิด การให้ เหตุผลแบบนี้เป็นการให้เหตุผลระบบตรรกะ เป็นการให้เหตุผลโดยใช้โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ เป็นพื้นฐาน คือ อนิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท อาจกล่าวได้ว่า การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็น การให้เหตุผลที่ใช้ข้อสรุปที่เป็นกฎเกณฑ์ทั่วไปเป็นหลัก แล้วจะได้ผลสรุปของกรณีที่สอดคล้องกับ กฎเกณฑ์ที่เป็นจริงเสมอ

Baroody (1993, pp. 2-59) ได้กล่าวว่า การให้เหตุผลเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับ คณิตศาสตร์ และการดำเนินชีวิตประจำวันของมนุษย์และแบ่งการให้เหตุผลเป็น 3 ประเภทคือ การให้ เหตุผลแบบสามัญสำนึก (Intuitive reasoning) ซึ่งเป็นลักษณะของการให้เหตุผลที่เกิดจากการหยั่งรู้ (Insight) หรือเกิดจากกลางสังหรณ์ ไม่ได้มีข้อมูลที่จำเป็นทั้งหมดในการตัดสินใจ หรือตัดสินใจ จากสิ่งที่เห็นได้ชัดเจน หรือจากความรู้สึกภายใน ส่วนอีก 2 ประเภท คือ การให้เหตุผลแบบอุปนัย

และการให้เหตุผลแบบนิรนัยเช่นเดียวกับของ โอคาฟเฟอร์ เมื่อพิจารณาถึงความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทั้ง 3 ประเภท บารูดี กล่าวว่า ในกระบวนการการสืบค้นทางคณิตศาสตร์มักเริ่มต้นด้วยการสรุปจากการให้เหตุผลแบบสามัญสำนึกหรือแบบอุปนัยที่เรียกว่า การสร้างข้อความคาดการณ (Conjecture) แล้วตรวจสอบข้อความคาดการณ โดยการพิสูจน์ ซึ่งก็คือการให้เหตุผลแบบนิรนัยนั่นเอง

สมวงษ์ แปลงประสพโชค (2544, หน้า 2-11) กล่าวว่า การให้เหตุผลที่ใช้กันอยู่มี 2 แบบคือ

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยอ้างจากตัวอย่าง หรือประสบการณ์ย่อยหลาย ๆ ตัวอย่างหลายแง่มุม และสรุปเป็นความรู้ทั่วไป
2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning) เป็นการอ้างเหตุผลจากความรู้พื้นฐานชุดหนึ่งที่ยอมรับมาก่อน ความรู้พื้นฐานที่ต้องยอมรับมาใช้อ้างเหตุผลนี้มีชื่อเรียกต่าง ๆ กัน เช่น เหตุ (Premise) สมมุติฐาน (Hypothesis) หรือสัจพจน์ (Axiom หรือ Postulate)

สสวท. (2555 ก, หน้า 40-45) ได้จำแนกการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 แบบดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นกระบวนการที่ใช้การสังเกตหรือทดลองหลาย ๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปซึ่งเชื่อว่าน่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง เรียกข้อสรุปนี้ว่า ข้อคาดการณ
2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นกระบวนการที่ยกเอาสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ แล้วใช้เหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์ อ้างจากสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงนั้นเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปหรือผลสรุปที่เพิ่มเติมขึ้นมาใหม่

การให้เหตุผลแบบนิรนัย ประกอบด้วยส่วนสำคัญ 2 ส่วน คือ

2.1 เหตุหรือสมมุติฐาน ซึ่งหมายถึง สิ่งที่เป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ ได้แก่ ค่านิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท ที่พิสูจน์แล้ว กฎหรือสมบัติต่าง ๆ

2.2 ผลหรือผลสรุป ซึ่งหมายถึง ข้อสรุปที่ได้จากเหตุหรือสมมุติฐาน

จากแนวคิดเกี่ยวกับการจัดแบ่งประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักการศึกษาที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การแบ่งประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ขึ้นอยู่กับเกณฑ์ที่ใช้ในการจัดแยกตามที่อยู่จัดประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้พิจารณา สำหรับประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่พบเห็นและนำไปใช้ค่อนข้างมาก คือ

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยอ้างจาก ตัวอย่าง หรือผลของกรณีเฉพาะหลาย ๆ กรณี แล้วนำไปสู่การสรุปเป็นกฎเกณฑ์ทั่วไป

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่ใช้ข้อสรุปที่เป็น กฎเกณฑ์ทั่วไปเป็นหลัก หรือสิ่งที่ยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ ได้แก่ คำนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท ที่พิสูจน์แล้ว กฎหรือสมบัติต่าง ๆ แล้วนำไปสู่ข้อสรุปหรือผลสรุป

ซึ่งผู้วิจัยได้นำการให้เหตุผลทั้งแบบอุปนัยและแบบนิรนัยไปใช้ประกอบการวิจัยครั้งนี้

ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษาและสถาบันทางการศึกษาได้กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลทาง คณิตศาสตร์ ดังต่อไปนี้

Stiggins (1997, p. 6) อธิบายว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งสำคัญเพราะการทำ ความเข้าใจปัญหาโดยใช้เหตุผล ช่วยให้นักเรียนเป็นนักคิดที่ดี ในบางโอกาสเราต้องใช้การให้ เหตุผลในลักษณะการวิเคราะห์เพื่อจะดูว่าส่วนปลีกย่อยต่าง ๆ เข้ากับภาพโดยรวมของสิ่งนั้น หรือไม่ หรือในบางโอกาส เราต้องใช้การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบเพื่อให้เข้าใจความเหมือนกับ ความแตกต่าง

Artzt and Shirel (1999, pp. 125-126) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนที่ทำให้การแก้ปัญหาสมบูรณ์ นักเรียนจะไม่สามารถเข้าใจ ปัญหา วิเคราะห์ปัญหาหรือวางแผนในการแก้ปัญหาได้หากปราศจากการให้เหตุผล กล่าวได้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จะมีความสำคัญควบคู่ไปกับการแก้ปัญหา

Russell (1999, p. 1) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นหัวใจสำคัญของ การเรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื่องจากวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะเป็นนามธรรม ซึ่งการให้ เหตุผลเป็นเครื่องมือที่จะเข้าใจนามธรรมนั้น โดยการให้เหตุผลเป็นสิ่งที่ใช้คิดเกี่ยวกับสมบัติต่าง ๆ ในทางคณิตศาสตร์ และพัฒนาให้อยู่ในลักษณะของการอ้างอิง เพื่อให้สามารถใช้ข้อเท็จจริงที่ เรียนรู้มาอ้างอิงไปยังสิ่งใหม่

สสวท. (2555 ก, หน้า 39) เสนอว่า การให้เหตุผลเป็นทักษะกระบวนการที่ส่งเสริมให้ นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างเป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ ถ้วนรอบคอบ สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม การคิดอย่างมีเหตุผลเป็นเครื่องมือสำคัญ ที่นักเรียนสามารถนำติดตัวไปใช้ในการพัฒนาตนเอง ในการเรียนรู้สิ่งใหม่ ๆ ในการทำงานในการดำรงชีวิต ดังนั้น การคิดอย่างมีเหตุผลจึงเป็นหัวใจ สำคัญของการสอนคณิตศาสตร์

จากข้อความข้างต้นสามารถสรุปความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้ว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างเป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบ และสามารถทำความเข้าใจปัญหาได้โดยใช้เหตุผล และการคิดอย่างมีเหตุผลจะช่วยให้นักเรียนเป็นนักคิดที่ดี และสามารถพัฒนาตนเองต่อไปในอนาคตได้

แนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

แนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มีหลายแนวทาง ดังนี้ Brandt (1984 อ้างถึงใน เวชฤทธิ์ อังกะภักทจร, 2555, หน้า 118-119) ได้กล่าวถึงแนวการสอนเพื่อส่งเสริมให้นักเรียนเกิดทักษะการคิดอย่างมีเหตุผลไว้ 3 แนวทาง ดังนี้

1. การสอนเพื่อให้เกิด (Teaching for thinking) เป็นการสอนเนื้อหาวิชาเพื่อเพิ่มความสามารถในการคิดของนักเรียน
2. การสอนการคิด (Teaching of thinking) เป็นการสอนเน้นไปที่ทักษะการคิดหรือเป็นการสอนทักษะการคิด ซึ่งแนวทางการสอนนั้นจะมีลักษณะที่แตกต่างกันหลายแนวทางตามความเชื่อพื้นฐานของผู้สอน
3. การสอนเกี่ยวกับการคิด (Teaching about thinking) เป็นการสอนที่ใช้การคิดเป็นเนื้อหาสาระของการสอน โดยมุ่งให้นักเรียนได้เรียนรู้ถึงสิ่งที่เป็นความคิดของตนเอง โดยไม่รู้ตนเองกำลังคิดอะไร และในขณะที่กำลังคิดอยู่นั้นตนเองรู้อะไรและไม่รู้อะไร ซึ่งสิ่งดังกล่าวนี้จะช่วยให้นักเรียนได้เข้าใจถึงกระบวนการคิดของตนเองอันก่อให้เกิดทักษะที่ เรียกว่า การสังเคราะห์ความคิดของตนเอง

สสวท. (2547, หน้า 3, หน้า 15-19) เสนอว่า การให้เหตุผลเป็นกระบวนการที่สำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ เป็นการเรียนด้วยความเข้าใจ มีการให้เหตุผลในการพิสูจน์ ดังนั้นครูจะต้องพัฒนาความสามารถของนักเรียนในการให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม โดยแนวทางการจัดการเรียนการสอนควรคำนึงถึงสิ่งต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนเรียนรู้อย่างมีเหตุผล
2. ให้นักเรียนได้มีโอกาสฝึกคิดอย่างมีเหตุผล
3. ให้นักเรียนฝึกเป็นผู้ให้เหตุผล
4. ให้นักเรียนฝึกเขียนอธิบายถึงสิ่งที่นักเรียนทำเพื่อหาคำตอบ
5. ให้นักเรียนฝึกใช้เหตุผลในการอธิบายหรืออภิปราย
6. ให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์ ประเมินการให้เหตุผลของผู้อื่น

7. ให้นักเรียนรู้จักใช้เหตุผลเป็นเครื่องมือสำหรับตรวจสอบหรือพิจารณาความถูกต้อง

8. ให้นักเรียนได้อาศัยการให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผล

อัมพร ม้าคนอง (2553, หน้า 50) เสนอแนะว่าความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนจะพัฒนาขึ้นได้ครุควรให้นักเรียนได้ปฏิบัติด้วยตนเองทั้งในบริบททางคณิตศาสตร์และบริบทอื่น ๆ รวมทั้งความพยายามใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนแสดงเหตุผลได้อย่างต่อเนื่อง เช่น “ทำไม” “เพราะอะไร” “ถ้าเงื่อนไขบางอย่างเปลี่ยนแปลงไป จะเกิดอะไรขึ้น รู้ได้อย่างไร” โดยครุควรให้ความสำคัญกับทุกเหตุผลไม่เฉพาะเหตุผลที่ถูกต้องหรือสมเหตุสมผลเท่านั้น ซึ่งการให้นักเรียนได้อธิบาย ชี้แจงเหตุผลจะช่วยให้นักเรียนได้ทบทวนการทำงานเพื่อสะท้อนความคิดของตนและที่สำคัญคือนักเรียนจะได้ข้อสรุปหรือตัดสินความถูกต้องของสิ่งต่าง ๆ ด้วยตนเองมากกว่าที่จะเชื่อตามที่ครูบอกหรือตามที่หนังสือเขียนไว้

จากแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนจะพัฒนาขึ้นได้ครุควรพยายามใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนได้แสดงเหตุผล ฝึกใช้เหตุผลในการอธิบายหรืออภิปรายหรือวิเคราะห์ ประเมินการให้เหตุผลของผู้อื่น รวมทั้งรู้จักใช้เหตุผลเป็นเครื่องมือสำหรับตรวจสอบหรือพิจารณาความถูกต้อง

เกณฑ์การให้คะแนนการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

เกณฑ์การให้คะแนนการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มีหลากหลาย ดังนี้

California state department of education (1989 อ้างถึงใน พรรรถทิพา พรหมรักษ์, หน้า 61-62) เสนอเกณฑ์การให้คะแนนกรณีที่ข้อสอบเป็นแบบอัตนัย โดยแบ่งเป็นระดับคะแนนเป็น 6 ระดับ คือ 6, 5, 4, 3, 2, 1 มีรายละเอียดดังนี้

ระดับ 6 ตอบแบบชัดเจน (Exemplary response) โดยให้คำตอบสมบูรณ์ ชัดเจน มีเหตุผล ไม่คลุมเครือและอธิบายได้ดีเยี่ยม ซึ่งรวมถึงการใช้แผนผังประกอบการอธิบายชัดเจน อ่านง่าย สามารถสื่อสารได้อย่างมีประสิทธิภาพ แสดงความเข้าใจเกี่ยวกับแนวคิดและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้เพื่อตอบคำถาม จำแนกส่วนประกอบสำคัญทั้งหมดของปัญหา ยกตัวอย่างที่ใช่และไม่ใช่ มีข้อมูลสนับสนุนชัดเจนและหนักแน่น

ระดับ 5 ตอบโดยมีข้อมูลเพียงพอ (Competent response) อธิบายชัดเจน มีเหตุผล และสมบูรณ์ ใช้แผนผังประกอบการอธิบายได้เหมาะสม สื่อสารได้อย่างมีประสิทธิภาพ แสดง

ความเข้าใจเกี่ยวกับแนวคิดและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้เพื่อตอบคำถาม จำแนกส่วนประกอบที่สำคัญโดยส่วนใหญ่ของปัญหา มีข้อมูลสนับสนุนเพียงพอ

ระดับ 4 ตอบโดยมีข้อบกพร่องเล็กน้อย แต่มีข้อมูลน่าสนใจ (Minor flaws but satisfactory) ตอบคำถามถูกต้อง ครบถ้วน แต่อธิบายสับสน ข้ออ้างหรือข้อสนับสนุนไม่สมบูรณ์ แผนผังประกอบการอธิบายไม่เหมาะสม หรือไม่ชัดเจน แสดงความเข้าใจแนวคิดทางด้านคณิตศาสตร์ที่เป็นพื้นฐานในการตอบคำถาม ใช้แนวคิดทางด้านคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ระดับ 3 ตอบโดยมีข้อบกพร่องมากแต่ค่อนข้างพอใช้ (Serious flaws but nearly satisfactory) เริ่มต้นในการตอบคำถามถูกต้องแต่ไม่ตอบคำถามบางคำถาม แสดงออกถึงความไม่เข้าใจ แนวคิดหรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์ คำนวณผิด นำความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ไปใช้ผิด แก้ปัญหาผิดวิธี

ระดับ 2 เริ่มต้นได้แต่แก้ปัญหาไม่ได้ (Begins, but fails to complete problem) อธิบายไม่เข้าใจ ใช้แผนผังประกอบการอธิบายไม่ชัดเจน แสดงถึงการไม่เข้าใจคำถาม คำนวณผิด

ระดับ 1 ไม่สามารถเริ่มต้นแก้ปัญหาได้ (Unable to begin effectively) คำตอบไม่สอดคล้องกับคำถาม นำเสนอข้อมูลที่ไม่เกี่ยวกับคำถามหรือไม่ตอบ

กรมวิชาการ (2546 ข, หน้า 135-137) ได้นำเสนอเกณฑ์เพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนใช้เป็นกรอบในการประเมินคุณภาพนักเรียนในด้านต่าง ๆ โดยทักษะการให้เหตุผลมีเกณฑ์ดังตารางที่ 2-11

ตารางที่ 2-11 เกณฑ์การให้คะแนนการทำข้อสอบแบบอัตนัย ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของกรมวิชาการ

ระดับคะแนน/ ความหมาย	ผลการทำข้อสอบแบบอัตนัย	ความสามารถในการให้ เหตุผลที่ปรากฏให้เห็น
4 / ดีมาก	การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ คำตอบถูกต้องครบถ้วน	มีการอ้างอิง เสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจอย่าง สมเหตุสมผล
3 / ดี	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจนนัก แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบถูกต้องครบถ้วน	มีการอ้างอิงที่ถูกต้องบางส่วน และเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจ

ตารางที่ 2-11 (ต่อ)

ระดับคะแนน/ ความหมาย	ผลการทำข้อสอบแบบอัตนัย	ความสามารถในการให้ เหตุผลที่ปรากฏให้เห็น
2 / พอใช้	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน หรือไม่ แสดงวิธีทำ คำตอบถูกต้อง ครบถ้วน หรือ การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ แต่ คำตอบไม่ถูกต้อง ขาดการตรวจสอบ	เสนอแนวคิดไม่สมเหตุสมผลใน การประกอบการตัดสินใจ
1 / ต้อง ปรับปรุง	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน แต่อยู่ใน แนวทางที่ถูกต้อง คำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดงวิธีทำและคำตอบที่ได้ไม่ ถูกต้อง แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง	มีความพยายามเสนอแนวคิด ประกอบการตัดสินใจ
0 / ไม่พยายาม	ทำได้ไม่ถึงเกณฑ์	ไม่มีแนวคิดประกอบการตัดสินใจ

สสวท. (2547, หน้า 50-52) ได้กล่าวว่า ประเมินเพื่อวัดความสามารถในการให้เหตุผล การประเมินเพื่อจุดประสงค์นี้ อาจใช้การให้คะแนนทักษะ/ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้าน การให้เหตุผล ซึ่งครูอาจใช้การประเมินแบบองค์รวม โดยใช้เกณฑ์ที่มีผู้พัฒนาไว้แล้วหรืออาจจะตั้ง เกณฑ์ขึ้นเองจากประสบการณ์จริงที่พบได้จากนักเรียน การประเมินความสามารถในการให้เหตุผล ใช้วิธีการให้คะแนนแบบกำหนดเกณฑ์การให้คะแนน (Rubric) เพื่อมุ่งหวังที่จะขจัดปัญหาที่จะเกิด จากการให้คะแนน ป้องกันความลำเอียงและเสริมสร้างความเป็นธรรม ตลอดจนสร้างระบบ การประเมินที่จะนำไปสู่การพัฒนาทั้งนี้อาจเปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการกำหนด เกณฑ์การให้คะแนน ซึ่งรายละเอียดของเกณฑ์จะขึ้นกับบริบทของเรื่องและระดับชั้นเรียนนั้น ๆ โดยทั่วไปอาจกำหนด ดังตารางที่ 2-12

ตารางที่ 2-12 เกณฑ์การให้คะแนนทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของ สสวท.

คะแนน / ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลที่ปรากฏให้เห็น
0 / ไม่พยายาม	- ไม่มีแนวคิดประกอบการตัดสินใจ/ มีแนวคิด ไม่ถูกต้อง
1 / ต้องปรับปรุง	- มีความพยายามเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจหรือ มีข้อบกพร่องมากกว่า 2 แห่ง
2 / พอใช้	- เสนอแนวคิดได้สมเหตุสมผลในการประกอบการตัดสินใจแต่ มีข้อบกพร่องมากกว่า 2 แห่ง
3 / ดี	- มีการอ้างอิงที่ถูกต้อง และเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจ มีข้อบกพร่องเพียง 1 แห่ง
4 / ดีมาก	- มีการอ้างอิง เสนอแนวคิดการประกอบการตัดสินใจอย่าง สมเหตุสมผล

สสวท. (2555 ข, หน้า 82) ได้เสนอตัวอย่างพฤติกรรมที่แสดงออกในด้านทักษะ
ความสามารถในการให้เหตุผล ดังนี้

- รวบรวมความรู้ที่เกี่ยวข้องในกระบวนการแก้ปัญหา
- เชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างเหตุและผล
- ตัดสินความถูกต้องของข้อสรุป
- เลือกใช้ความรู้เพื่อลำดับขั้นตอนของการให้เหตุผลและลงข้อสรุป
- ตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผล

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทาง
คณิตศาสตร์จะมีลักษณะเป็นเกณฑ์การให้คะแนนแบบภาพรวมที่พิจารณาจากความสามารถใน
การให้เหตุผลที่ปรากฏให้เห็น ซึ่งเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทาง
คณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยเลือกใช้ในการวิจัยครั้งนี้โดยปรับปรุงมาจากกรมวิชาการ เนื่องจากเกณฑ์
ดังกล่าวมีความเหมาะสมและสอดคล้องกับงานวิจัยในครั้งนี้นี้มากที่สุด ซึ่งมีรายละเอียด
ดังตารางที่ 2-13

ตารางที่ 2-13 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัย
เลือกใช้ในการวิจัย

ระดับคะแนน	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
4	- มีการอธิบายแสดงแนวคิดหรือมีการอ้างอิงเหตุผลประกอบการตัดสินใจ และแสดงข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล
3	- มีการอธิบายแสดงแนวคิดหรือมีการอ้างอิงเหตุผลประกอบการตัดสินใจ และแสดงข้อสรุปค่อนข้างสมเหตุสมผล หรือมีการอ้างอิงเหตุผลผิดพลาด เล็กน้อย
2	- มีการอธิบายหรือการอ้างอิงแสดงแนวคิดประกอบการตัดสินใจ หรือแสดงข้อสรุปที่สมเหตุสมผลเพียงบางส่วน
1	- มีความพยายามอธิบายหรือแสดงแนวคิดประกอบการตัดสินใจ แต่ไม่มีการแสดงข้อสรุป หรือแสดงข้อสรุปแต่ไม่สมเหตุสมผล
0	- ไม่มีการอธิบายหรือแสดงแนวคิดประกอบคำตอบ หรือ ไม่มีการเขียนใด ๆ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Collins (1990) ได้ทำการวิจัยเรื่อง รูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน กับนักเรียนไฮสกูลปีที่ 1 จำนวน 30 คน โดยใช้ไอคิวและเกรดคณิตศาสตร์ เป็นเกณฑ์ในการแบ่งกลุ่มแต่ละกลุ่มร่วมกันอภิปราย 4 ครั้ง ๆ ละ 5 นาที ซึ่งเนื้อหาที่ใช้ในการอภิปรายเป็นเนื้อหาทางตรรกวิทยาและทฤษฎีเซต ทั้งสองกลุ่มจัดให้มีการสืบเสาะตลอดเวลา นอกจากนี้ยังจัดประสบการณ์ด้านต่าง ๆ เช่น จัดฉายภาพยนตร์ และตั้งปัญหาทางตรรกวิทยา 8 ข้อ ผลปรากฏว่ากลุ่มทดลองได้คะแนนเฉลี่ย 6 คะแนน กลุ่มควบคุมได้ 5 คะแนน ซึ่งผลวิจัยแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

Mason (1997) ได้ศึกษาการเรียนรู้พีชคณิตด้วยตนเองโดยใช้การสืบสวนสอบสวนกลุ่มย่อยของผู้เรียนเกรด 9 มีความมุ่งหมายเพื่อแสดงให้เห็นถึงองค์ประกอบที่มีผลต่อความสำเร็จในการเรียนรู้ของผู้เรียน โดยใช้การสืบสวนสอบสวนกลุ่มย่อยและแสดงให้เห็นว่าองค์ประกอบเหล่านั้นมีผลต่อกระบวนการเรียนรู้ของผู้เรียนอย่างไร กลุ่มตัวอย่างเป็นผู้เรียนเกรด 9 จำนวน 22 คน ที่เรียนวิชาพีชคณิต ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลจากการสนทนาในกลุ่มผลงานของผู้เรียน การเขียนและการบ้านที่ให้ผู้เรียนเขียนเกี่ยวกับการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ในแต่ละวันผู้วิจัยได้สรุปและตีความหมายจากการเรียนรู้ดังกล่าว ผลจากการวิจัยพบว่า ผู้เรียนจะเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้ดีจากการสอนโดยใช้การสืบสวนสอบสวนกลุ่มย่อย ซึ่งสามารถสังเกตได้จากการสร้างสรรค์ความรู้ของผู้เรียน ผู้เรียนสามารถเรียนรู้การดำเนินการที่ซับซ้อนและตีความหมายของลักษณะความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ ความสัมพันธ์ของครูกับผู้เรียน และความสัมพันธ์ของการทดลองกับคะแนนการเรียนรู้ของแต่ละบุคคลขึ้นอยู่กับ การสร้างประสบการณ์และมุมมองของผู้เรียนแต่ละคน การเรียนรู้ระหว่างบุคคลเกิดขึ้น ได้ดีหรือไม่ขึ้นอยู่กับพัฒนาความสัมพันธ์ระหว่างผู้เรียนแต่ละคน กับผู้เรียนคนอื่น ๆ และความสัมพันธ์ระหว่างผู้เรียนกับครู ผู้เรียนแต่ละคนกับครูจะมีอิทธิพลต่อกันและกัน

วัชร น้อยมี (2551) ได้พัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผล ของผู้เรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผลการพัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลพบ ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของผู้เรียนหลังได้รับการสอน โดยใช้ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผล ของผู้เรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

โสมรค์มี ดาหลาย (2551) ได้ศึกษา ผลของการพัฒนามโนทัศน์โดยใช้กระบวนการสืบสอบที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการพัฒนามโนทัศน์โดยใช้กระบวนการสืบสอบมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปกติที่ระดับนัยสำคัญ .05

ณัฐกฤตา ปัตตลโป (2553) ได้ศึกษาการใช้ชุดการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ เรื่อง การประยุกต์อัตราส่วนและร้อยละ ที่มีต่อทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการศึกษาพบว่า ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภายหลังจากใช้ชุดการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ เรื่อง การประยุกต์อัตราส่วนและร้อยละสูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และภายหลังจากการใช้ชุดการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ เรื่อง การประยุกต์อัตราส่วนและร้อยละ ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

วรรณวิสา จันทร์สุนทรภาพร (2557) ได้พัฒนากิจกรรมการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการสืบเสาะหาความรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความคล้ายของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน หลังการจัดการกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการสืบเสาะหาความรู้สูงกว่าก่อนจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแบบสืบสวนสอบสวน พบว่า การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเป็นรูปแบบหนึ่งมีส่วนช่วยพัฒนาความสามารถหรือทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะความสามารถในการแก้ปัญหา และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนอีกด้วย อีกทั้งยังช่วยส่งเสริมกระบวนการคิดและความคิดรวบยอดของผู้เรียน และปลูกฝังนิสัยการศึกษาค้นคว้าหาข้อมูลของผู้เรียนด้วย

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอน ดังต่อไปนี้

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
4. การดำเนินการวิจัย
5. การเก็บรวบรวมข้อมูล
6. การวิเคราะห์ข้อมูล
7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนชลกันยานุกูล อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี จำนวน 230 คน

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/7 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนชลกันยานุกูล อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี รวม 50 คน ได้มาจากรีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่ม (Cluster random sampling) ซึ่งนักเรียนทุกห้องมีผลการเรียนไม่ต่างกัน เนื่องจากทางโรงเรียนได้จัดนักเรียนของแต่ละห้องแบบละความสามารถ

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ดังนี้

1. แผนการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนรายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น จำนวน 6 แผน
2. แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เป็นแบบอัตนัย จำนวน 6 ข้อ
3. แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เป็นแบบอัตนัย จำนวน 6 ข้อ

การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้สร้างเครื่องมือในการวิจัย ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ขั้นตอนการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมเรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีขั้นตอนการสร้างดังต่อไปนี้
 - 1.1 ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และศึกษาหลักสูตรสถานศึกษา โรงเรียนชลกันยานุกูล อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี ผลการเรียนรู้ คำอธิบายรายวิชา สาระการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ และเนื้อหา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
 - 1.2 ศึกษาการเขียนแผนการจัดการเรียนรู้ โดยจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนจากเอกสาร ตำรา งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเพื่อนำมาใช้ในการเขียนแผนการจัดการเรียนรู้
 - 1.3 เลือกเนื้อหาจากสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพื่อจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ให้สอดคล้องกับหลักสูตรสถานศึกษา โดยผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์ ผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และกำหนดชั่วโมงสอนให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้และสาระการเรียนรู้ โดยมีรายละเอียดดังตารางที่ 3-1

ตารางที่ 3-1 แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แผนที่	ผลการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จำนวน (คาบ)
1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของผลบวกและ ผลต่างของจำนวน จริงหรือมุม	1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับ ฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟ ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชัน ตรีโกณมิติและการประยุกต์ไปใช้ แก้ปัญหาได้ 3. ใช้วิธีหลากหลายในการ แก้ปัญหา ใช้ทักษะกระบวนการ ทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาได้อย่าง เหมาะสม มีการให้เหตุผล การใช้ ภาษาและสัญลักษณ์ทาง คณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อ ความหมายและนำเสนอได้อย่าง ถูกต้อง มีการเชื่อมโยงความรู้ ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และมี ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ใน การทำงาน	1. สามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริง หรือมุมได้ 2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมโดย ใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือ มุม ไปแก้ปัญหาค่า 3. สามารถแสดงแนวคิดหรืออ้างอิงเหตุผลเกี่ยวกับการหาค่าของ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ได้อย่างสมเหตุสมผล	1. ฟังก์ชัน ตรีโกณมิติของ ผลบวกและผลต่าง ของจำนวนจริงหรือ มุม	2

ตารางที่ 3-1 (ต่อ)

แผนที่	ผลการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จำนวน (คาบ)
2. ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	<p>1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</p> <p>2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ไปใช้แก้ปัญหาได้</p> <p>3. ใช้วิธีหลากหลายในการแก้ปัญหาใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม มีการให้เหตุผล การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง มีการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการทำงาน</p>	<p>1. สามารถหาค่าของตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้</p> <p>2. นำความรู้เรื่องตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติไปใช้แก้ปัญหาได้</p> <p>3. สามารถแสดงแนวคิดหรืออ้างอิงผลเกี่ยวกับการหาค่าของตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้อย่างสมเหตุสมผล</p>	<p>1. ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ</p>	2

ตารางที่ 3-1 (ต่อ)

แผนที่	ผลการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จำนวน (คาบ)
3. การพิสูจน์เอกลักษณ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	<p>1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเซตกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</p> <p>2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ใช้แก้ปัญหาได้</p> <p>3. ใช้วิธีหลากหลายในการแก้ปัญหา ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม มีการให้เหตุผล การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง มีการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการทำงาน</p>	<p>1. สามารถพิสูจน์เอกลักษณ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติได้</p> <p>2. นำความรู้เรื่องการพิสูจน์เอกลักษณ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติไปใช้แก้ปัญหาได้</p> <p>3. สามารถแสดงแนวคิดหรืออ้างเหตุผลในการพิสูจน์เอกลักษณ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติได้อย่างสมเหตุสมผล</p>	<p>1. การพิสูจน์เอกลักษณ์</p> <p>ฟังก์ชันตรีโกณมิติ</p>	2

ตารางที่ 3-1 (ต่อ)

แผนที่	ผลการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จำนวน (คาบ)
4. สมการตรีโกณมิติ	<p>1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</p> <p>2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ไปใช้แก้ปัญหาได้</p> <p>3. ใช้วิธีหลากหลายในการแก้ปัญหา ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม มีการให้เหตุผล การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง มีการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการทำงาน</p>	<p>1. สามารถแก้สมการตรีโกณมิติที่มีค่าตอบของสมการอยู่ในรูปค่าทั่วไปได้</p> <p>2. นำความรู้เรื่องสมการตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาได้</p> <p>3. สามารถแสดงแนวคิดหรืออ้างอิงเหตุผลเกี่ยวกับการแก้สมการตรีโกณมิติที่มีค่าตอบของสมการอยู่ในรูปค่าทั่วไปได้อย่างสมเหตุสมผล</p>	<p>1. สมการตรีโกณมิติ</p>	2

ตารางที่ 3-1 (ต่อ)

แผนที่	ผลการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จำนวน (ตาม)
5. กฎของโคไซน์และไซน์	<p>1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</p> <p>2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ไปใช้แก้ปัญหาได้</p> <p>3. ใช้วิธีหลากหลายในการแก้ปัญหา ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม มีการให้เหตุผล การสื่อสารและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง มีการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการทำงาน</p>	<p>1. สามารถหาความยาวของด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมโดยใช้กฎของโคไซน์และไซน์</p> <p>2. นำความรู้เรื่องกฎของโคไซน์และไซน์ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้</p> <p>3. สามารถแสดงแนวคิดหรืออ้างอิงเหตุผลเกี่ยวกับการหาความยาวของด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมโดยใช้กฎของโคไซน์และไซน์ได้อย่างสมเหตุสมผล</p>	<p>1. กฎของโคไซน์และไซน์</p>	2

ตารางที่ 3-1 (ต่อ)

แผนที่	ผลการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จำนวน (คาบ)
6. การหาระยะทางและความสูง	<p>1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเจ็บนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</p> <p>2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ไปใช้แก้ปัญหาได้</p> <p>3. ใช้วิธีหลากหลายในการแก้ปัญหา ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม มีการให้เหตุผล การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง มีการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการทำงาน</p>	<p>1. สามารถหาระยะทางและความสูงของสิ่งใด ๆ โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติได้</p> <p>2. นำความรู้เรื่องการหาระยะทางและความสูงไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้</p> <p>3. สามารถแสดงแนวคิดหรืออ้างอิงเหตุผลเกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูงของสิ่งใด ๆ โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติได้อย่างสมเหตุสมผล</p>	<p>1. การหาระยะทางและความสูง</p>	2
รวม				12

1.4 จัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติมเรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งเป็นแผนการจัดการเรียนรู้ ที่ผู้วิจัย สร้างขึ้น จำนวน 6 แผน เวลา 12 คาบ โดยแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้มีขั้นตอนการเรียนรู้ 5 ขั้นตอน ดังนี้

1.4.1 ขั้นเตรียมความพร้อม หมายถึง ขั้นการเตรียมความพร้อมทางการเรียนให้กับ นักเรียนโดยผู้สอนทำการทบทวนและเชื่อมโยงความรู้เดิมเข้ากับความรู้ใหม่ ด้วยการใช้คำถามนำ

1.4.2 ขั้นการสังเกต หมายถึง ขั้นที่ผู้สอนนำเสนอโจทย์หรือสถานการณ์ปัญหา ที่ท้าทายความคิดของนักเรียนและให้นักเรียนสังเกตโจทย์หรือสถานการณ์ที่เป็นปัญหานั้น และ วิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหา

1.4.3 ขั้นการอธิบายและปฏิบัติกิจกรรม หมายถึง ขั้นที่ผู้สอนให้นักเรียนรวบรวม ข้อมูลจากการวิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหาเพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งในขั้นนี้ผู้สอนจะ คอยกระตุ้นให้นักเรียนค้นหาคำตอบ โดยอาศัยความสามารถในการให้เหตุผลมาอธิบายแนวคิด หรือวิธีการ ได้มาซึ่งคำตอบของปัญหา

1.4.4 ขั้นสรุป หมายถึง ขั้นที่นักเรียนสรุปเกี่ยวกับคำตอบหรือข้อสรุปของโจทย์ หรือสถานการณ์ปัญหา

1.4.5 ขั้นการประยุกต์ใช้ หมายถึง ขั้นที่ให้นักเรียนนำหลักการ กฎเกณฑ์ และ วิธีการแก้ ปัญหาไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์อื่นๆ

โดยองค์ประกอบของแผนการจัดการเรียนรู้ดังกล่าว ประกอบด้วย

- 1) ชื่อแผนการจัดการเรียนรู้ 2) ผลการเรียนรู้ 3) จุดประสงค์การเรียนรู้ 4) สาระสำคัญ
- 5) สาระการเรียนรู้ 6) กิจกรรมการเรียนรู้ 7) สื่อ อุปกรณ์ และแหล่งเรียนรู้ 8) การวัดและประเมินผล

1.5 นำแผนการจัดการเรียนรู้เสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เพื่อตรวจสอบ ความถูกต้องและความสอดคล้องระหว่างผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระสำคัญ สาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อ อุปกรณ์ และแหล่งเรียนรู้ การวัดและประเมินผล รวมทั้ง ภาษาที่ถูกต้อง และนำข้อเสนอแนะที่ได้มาปรับปรุง

1.6 นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นและปรับปรุงตามคำแนะนำของอาจารย์ ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์แล้วเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์จำนวน 5 คนเพื่อตรวจสอบ ความตรงเชิงเนื้อหา ความสอดคล้องของแผนซึ่งประกอบด้วย ผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระสำคัญ สาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อ อุปกรณ์ และแหล่งเรียนรู้ การวัดและ ประเมินผล ตลอดจนภาษาที่ถูกต้อง โดยการหาค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC: Index of objective congruence) ค่าดัชนีความสอดคล้องที่ยอมรับได้มีค่าตั้งแต่ 0.50 ขึ้นไป

โดยใช้เกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

+1	หมายถึง	แน่ใจว่าองค์ประกอบของแผนการจัดการเรียนรู้ สอดคล้องกัน
0	หมายถึง	ไม่แน่ใจว่าองค์ประกอบของแผนการจัดการเรียนรู้ สอดคล้องกัน
-1	หมายถึง	แน่ใจว่าองค์ประกอบของแผนการจัดการเรียนรู้ไม่ สอดคล้องกัน

1.7 นำแผนการจัดการเรียนรู้มาปรับปรุงตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ ซึ่งได้ค่าดัชนี ความสอดคล้องขององค์ประกอบของแผนการจัดการเรียนรู้ (IOC) อยู่ระหว่าง 0.6-1.0 โดยผู้เชี่ยวชาญได้ให้ข้อเสนอแนะและปรับปรุงแก้ไข ดังนี้

- ให้เพิ่มเติมรายละเอียดในส่วนสาระการเรียนรู้ และสาระสำคัญ
- ปรับภาษาที่ใช้ในคำถาม ใบกิจกรรมและแบบฝึกหัดให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น
- แก้ไขคำผิดทุกแผนการจัดการเรียนรู้
- ปรับในเรื่องการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้มีความเหมาะสมกับเวลาและสามารถ

จัดกิจกรรมการเรียนรู้ได้จริง

ซึ่งผู้วิจัยได้แก้ไขตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญเรียบร้อยแล้ว จากนั้นเสนอต่ออาจารย์ ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

1.8 นำแผนการจัดการเรียนรู้ไปทดลองใช้ (Try out) กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 5 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 49 คน ของโรงเรียนชลกันยานุกูล อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557

1.9 นำผลการทดลองมาปรับปรุงแก้ไขแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การประยุกต์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยวิธีการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน พร้อมทั้ง จัดพิมพ์ฉบับจริง ดังนี้

เช่น ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ใบกิจกรรมที่ 2.2

- จาก โจทย์ข้อที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้านประกอบมุมฉากยาว ด้านละ 8 และ 15 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\hat{A}CB = \theta$ และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF รูปหนึ่ง มีด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 3 และ 4 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\hat{DFE} = \alpha$ จงหาค่า

$$\sin\left(\arctan \frac{8}{15} + \arccos \frac{4}{5}\right)$$

- ปรับเป็น โจทย์ข้อที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{AB} และ \overline{BC} ยาวด้านละ 8 และ 15 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\hat{A}CB = \theta$ และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{DE} และ \overline{EF} ยาวด้านละ 3 และ 4 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\hat{D}FE = \alpha$ จงหาค่า $\sin\left(\arctan\frac{8}{15} + \arccos\frac{4}{5}\right)$

ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ใบกิจกรรมที่ 3.1

- จาก ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของโดเมนต่าง ๆ มีค่าเท่ากันทุกโดเมน

- ปรับเป็น ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของ $\tan^2\theta$ มีค่าเท่ากับ $\frac{1 + \tan^2\theta}{1 + \cot^2\theta}$ สำหรับ

ทุกมุม θ

ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ใบกิจกรรมที่ 3.2

- จาก โจทย์ข้อที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{AB} ยาว $\sqrt{3}$ หน่วย และมีมุม $\hat{A}CB = 60^\circ$ และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{DE} ยาว 3 หน่วย และมีมุม $\hat{D}FE = 37^\circ$ จงหาค่า $\sin(60^\circ + 37^\circ)$

- ปรับเป็น โจทย์ข้อที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{AB} และ \overline{AC} ยาวด้านละ $\sqrt{3}$ และ 2 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\hat{A}CB = 60^\circ$ และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{DE} และ \overline{DF} ยาวด้านละ 3 และ 5 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\hat{D}FE = 37^\circ$ จงหาค่า $\sin(60^\circ + 37^\circ)$

1.10 นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ปรับปรุงแล้วไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

2 แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เป็นแบบอัตนัย จำนวน 6 ข้อ มีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

2.1 ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และศึกษาเนื้อหาและผลการเรียนรู้ตามหลักสูตรสถานศึกษา โรงเรียนชลกันยานุกูล อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี

2.2 ศึกษาแบบเรียน คู่มือครู หลักการ วิธีการสร้างแบบทดสอบและแนวทาง การวัดและการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากเอกสารและตำราเอกสารที่เกี่ยวข้อง

2.3 วิเคราะห์เนื้อหาจากสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพื่อจัดทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ให้สอดคล้องกับ ผลการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ และกำหนดจำนวนข้อสอบให้สอดคล้องกับสาระการเรียนรู้และจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยมี รายละเอียดดังตารางที่ 3-2

ตารางที่ 3-2 การวิเคราะห์ข้อสอบแบบอัตนัยเพื่อวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ผลการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	จำนวนข้อสอบที่ออกทั้งหมด	จำนวนข้อสอบที่ถูกต้องจริง
1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ใช้แก้ปัญหาได้ 3. ใช้วิธีหลากหลายในการแก้ปัญหาใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม มีการให้เหตุผล การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง มีการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆทางคณิตศาสตร์ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการทำงาน	ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม	นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมโดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ไปใช้แก้ปัญหาได้	2	1
	ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	นำความรู้เรื่องตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติไปใช้แก้ปัญหาได้	2	1
	การพิสูจน์เอกลักษณ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	นำความรู้เรื่องการพิสูจน์เอกลักษณ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติไปใช้แก้ปัญหาได้	2	1
	สมการตรีโกณมิติ	นำความรู้เรื่องสมการตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาได้	2	1
	กฎของโคไซน์และโคไซน์	นำความรู้เรื่องกฎของโคไซน์และโคไซน์ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้	2	1
	การหาระยะทางและความสูง	นำความรู้เรื่องการหาระยะทางและความสูงไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้	2	1
	รวม		12	6

2.4 สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยสร้างแบบทดสอบอัตราณ์ จำนวน 12 ข้อ ต้องการใช้จริง 6 ข้อ เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างข้อสอบ ดังตารางที่ 3-2

2.5 กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริก (Rubric assessment) ดังตารางที่ 3-3

ตารางที่ 3-3 เกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

รายการประเมิน	คะแนน	เกณฑ์พิจารณา
1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา	2	- ระบุว่าปัญหาถามอะไร กำหนดอะไรมาบ้าง และมีเงื่อนไขอย่างไรได้อย่างถูกต้อง
	1	- ระบุว่าปัญหาถามอะไร กำหนดอะไรมาบ้าง และมีเงื่อนไขอย่างไรได้ถูกต้องบางส่วน
	0	- ระบุว่าปัญหาถามอะไร กำหนดอะไรมาบ้าง และมีเงื่อนไขอย่างไรได้ไม่ถูกต้อง
2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา	2	- แสดงความสัมพันธ์ต่าง ๆ จากข้อมูลหรือเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง และเลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม สอดคล้องกับปัญหา
	1	- แสดงความสัมพันธ์ต่าง ๆ จากข้อมูลหรือเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง แต่เลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ไม่เหมาะสมหรือไม่ครอบคลุมประเด็นของปัญหา
	0	- แสดงความสัมพันธ์ต่าง ๆ จากข้อมูลหรือเงื่อนไขที่กำหนดให้ไม่ถูกต้อง หรือเลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ไม่ถูกต้อง
3. ขั้นดำเนินการตามแผน	2	- นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้อง และแสดงการแก้ปัญหาเป็นลำดับขั้นตอนได้อย่างชัดเจน
	1	- นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้อง แต่การแสดงลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหายังไม่ชัดเจน หรือมีการแทนค่า หรือคำนวณที่ผิดพลาด
	0	- นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดงลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหา

ตารางที่ 3-3 (ต่อ)

รายการประเมิน	คะแนน	เกณฑ์พิจารณา
4. ขั้นการสรุปคำตอบ	1	- สรุปคำตอบได้ถูกต้อง สมบูรณ์
	0	- ไม่มีการสรุปคำตอบ หรือสรุปคำตอบไม่ถูกต้อง

2.6 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นจำนวน 12 ข้อ พร้อมเกณฑ์การให้คะแนนเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ เพื่อตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม ความสอดคล้องกับเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ และนำข้อเสนอแนะที่ได้มาปรับปรุง

2.7 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จำนวน 12 ข้อ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นและปรับปรุงตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์แล้วเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์จำนวน 5 คนเพื่อตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหา ความสอดคล้องของแบบทดสอบกับจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยการหาค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC: Index of objective congruence) ค่าดัชนีที่ยอมรับได้มีค่าตั้งแต่ 0.50 ขึ้นไป

โดยใช้เกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

+1	หมายถึง	แน่ใจว่าข้อสอบนั้นวัดตรงตามจุดประสงค์การเรียนรู้
0	หมายถึง	ไม่แน่ใจว่าข้อสอบนั้นวัดตรงตามจุดประสงค์การเรียนรู้
-1	หมายถึง	แน่ใจว่าข้อสอบนั้นไม่วัดตรงตามจุดประสงค์การเรียนรู้

ซึ่งได้ค่าดัชนีความสอดคล้องขององค์ประกอบของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (IOC) อยู่ระหว่าง 0.80-1.00 โดยผู้เชี่ยวชาญได้ให้ข้อเสนอแนะและปรับปรุงแก้ไขคือ ให้ปรับคำถามให้ชัดเจนเพื่อให้เข้าใจง่าย และเพิ่มเติมเงื่อนไขของโจทย์ ดังนี้

- จาก สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 15 และ 36 หน่วย และมีมุม $\hat{A}CB = \theta$ และสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF รูปหนึ่ง มีด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 8 และ 17 หน่วย และมีมุม $\hat{DFE} = \alpha$ จงหาค่า $\cos\left(\arcsin\frac{15}{39} - \arccos\frac{15}{17}\right)$

- ปรับเป็น รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{AB} และ \overline{BC} ยาวด้านละ 15 และ 36 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\hat{A}CB = \theta$ และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{DE} และ \overline{EF} ยาวด้านละ 8 และ 15 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\hat{DFE} = \alpha$ จงหาค่า

$$\cos\left(\arcsin \frac{15}{39} - \arccos \frac{15}{17}\right)$$

- จาก นิยามยืนอยู่บนคาบฟ้าตึกหลังหนึ่ง มองเห็นรถยนต์เป็นมุมก้ม 30 องศา และรถยนต์จอดอยู่ริมถนนในแนวเดียวกับตึก ถ้ารถยนต์อยู่ห่างจากตึก 100 เมตร จงหาหาความสูงของตึกนี้

- ปรับเป็น นิยามยืนอยู่บนคาบฟ้าตึกหลังหนึ่ง มองเห็นรถยนต์เป็นมุมก้ม 30 องศา และรถยนต์จอดอยู่ริมถนนในแนวเดียวกับตึก ถ้ารถยนต์อยู่ห่างจากตึก 100 เมตร จงหาหาความสูงของตึกนี้ เมื่อนิยามสูง 1.60 เมตร (กำหนด $\sqrt{3} = 1.732$)

2.8 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

มาปรับปรุงตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ จากนั้นเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

2.9 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผ่านการปรับปรุงแล้ว ไปทดลองใช้ (try out) กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 49 คน ของโรงเรียนชลกันยานุกูล อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 แล้วนำผลมาวิเคราะห์คุณภาพของแบบทดสอบ ดังนี้

1) หาความยากง่าย (P_D) ของแบบทดสอบรายข้อ แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.2-0.8

2) หาค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบเป็นรายข้อ แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่าอำนาจจำแนกที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป

2.10 คัดเลือกข้อสอบที่ผ่านการตรวจสอบคุณภาพแล้วซึ่งตรงตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ได้กำหนดไว้ จำนวน 6 ข้อ มีความยากง่าย (P_D) เท่ากับ 0.49-0.74 และค่าอำนาจจำแนก (D) เท่ากับ 0.23-0.73 จากนั้นนำมาหาค่าความเที่ยงของแบบทดสอบ (Reliability) โดยใช้สูตรการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัก ซึ่งมีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.86

2.11 จัดทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แล้วนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

3. แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เป็นแบบอัตนัย จำนวน 6 ข้อ

มีขั้นตอนการสร้างดังนี้

3.1 ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และศึกษาเนื้อหาและผลการเรียนรู้ตามหลักสูตรสถานศึกษา โรงเรียนชลกันยานุกูล อําเภอยะมือง จังหวัดชลบุรี

3.2 ศึกษาแบบเรียน คู่มือครู หลักการ วิธีการสร้างแบบทดสอบและแนวทางการวัดและการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จากเอกสารและตำราเอกสารที่เกี่ยวข้อง

3.3 วิเคราะห์เนื้อหาจากสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพื่อจัดทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ให้สอดคล้องกับ ผลการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ และกำหนดจำนวนข้อสอบให้สอดคล้องกับสาระการเรียนรู้และจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยมีรายละเอียดดังตารางที่ 3-4

ตารางที่ 3-4 การวิเคราะห์ข้อสอบแบบอัตนัยเพื่อวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ผลการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	จำนวนข้อสอบที่ออกทั้งหมด	จำนวนข้อสอบที่ต้องการจริง
<p>1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</p> <p>2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ไปใช้แก้ปัญหาได้</p> <p>3. ใช้วิธีหลากหลายในการแก้ปัญหาใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม มีการให้เหตุผลการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง มีการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการทำงาน</p>	ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม	สามารถแสดงแนวคิดหรืออ้างอิงเหตุผลเกี่ยวกับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้อย่างสมเหตุสมผล	2	1
	ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	สามารถแสดงแนวคิดหรืออ้างอิงเหตุผลเกี่ยวกับการหาค่าของตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้อย่างสมเหตุสมผล	2	1
	การพิสูจน์เอกลักษณ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	สามารถแสดงแนวคิดหรืออ้างอิงเหตุผลในการพิสูจน์เอกลักษณ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติได้อย่างสมเหตุสมผล	2	1
	สมการตรีโกณมิติ	สามารถแสดงแนวคิดหรืออ้างอิงเหตุผลเกี่ยวกับการแก้สมการตรีโกณมิติที่มีค่าตอบของสมการอยู่ในรูปค่าทั่วไปได้อย่างสมเหตุสมผล	2	1

ตารางที่ 3-4 (ต่อ)

ผลการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	จำนวน ข้อสอบที่ ออกทั้งหมด	จำนวน ข้อสอบที่ ต้องการจริง
<p>1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</p> <p>2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ไปใช้แก้ปัญหา</p> <p>3. ใช้วิธีหลากหลายในการแก้ปัญหาใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม มีการให้ผลตอบรับ การสื่อสาร และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง มีการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการทำงาน</p>	<p>กฎของโคไซน์และไซน์ สามารถแสดงแนวคิดหรืออ้างอิงเหตุผลเกี่ยวกับกรหาความยาวของด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม โดยใช้กฎของโคไซน์และไซน์ได้อย่างสมเหตุสมผล</p> <p>การหาระยะทางและความสูง</p>	<p>สามารถแสดงแนวคิดหรืออ้างอิงเหตุผลเกี่ยวกับกรหาความยาวของด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม โดยใช้กฎของโคไซน์และไซน์ได้อย่างสมเหตุสมผล</p> <p>สามารถแสดงแนวคิดหรืออ้างอิงเหตุผลเกี่ยวกับกรหา ระยะทางและความสูงของสิ่งใด ๆ โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติได้อย่างสมเหตุสมผล</p>	<p>2</p> <p>2</p>	<p>1</p> <p>1</p>
<p>รวม</p>	<p>รวม</p>	<p>รวม</p>	<p>12</p>	<p>6</p>

3.4 สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยสร้างแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 12 ข้อ ต้องการใช้จริง 6 ข้อ เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างข้อสอบดังตารางที่ 3-4

3.5 กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริก (Rubric assessment) ดังตารางที่ 3-5

ตารางที่ 3-5 เกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ระดับคะแนน	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
4	- มีการอธิบายแสดงแนวคิดหรือมีการอ้างอิงเหตุผลประกอบการตัดสินใจ และแสดงข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล
3	- มีการอธิบายแสดงแนวคิดหรือมีการอ้างอิงเหตุผลประกอบการตัดสินใจ และแสดงข้อสรุปค่อนข้างสมเหตุสมผล หรือมีการอ้างอิงเหตุผลผิดพลาดเล็กน้อย
2	- มีการอธิบายหรือการอ้างอิงแสดงแนวคิดประกอบการตัดสินใจ หรือแสดงข้อสรุปที่สมเหตุสมผลเพียงบางส่วน
1	- มีความพยายามอธิบายหรือแสดงแนวคิดประกอบการตัดสินใจ แต่ไม่มีการแสดงข้อสรุป หรือแสดงข้อสรุปแต่ไม่สมเหตุสมผล
0	- ไม่มีการอธิบายหรือแสดงแนวคิดประกอบคำตอบ หรือไม่มีการเขียนใด ๆ

3.6 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้น จำนวน 12 ข้อ พร้อมเกณฑ์การให้คะแนนเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ เพื่อตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม ความสอดคล้องกับเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ และนำข้อเสนอแนะที่ได้มาปรับปรุง

3.7 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จำนวน 12 ข้อ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นและปรับปรุงตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์แล้วเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์จำนวน 5 คนเพื่อตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหา ความสอดคล้องของแบบทดสอบกับจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยการหาค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC: Index of objective congruence) ค่าดัชนีที่ยอมรับได้มีค่าตั้งแต่ 0.50 ขึ้นไป

โดยใช้เกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

+1	หมายถึง	แน่ใจว่าข้อสอบนั้นวัดตรงตามจุดประสงค์การเรียนรู้
0	หมายถึง	ไม่แน่ใจว่าข้อสอบนั้นวัดตรงตามจุดประสงค์การเรียนรู้
-1	หมายถึง	แน่ใจว่าข้อสอบนั้นไม่วัดตรงตามจุดประสงค์การเรียนรู้

ซึ่งได้ค่าดัชนีความสอดคล้องขององค์ประกอบของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (IOC) เท่ากับ 1.00 โดยผู้เชี่ยวชาญได้ให้ข้อเสนอแนะและปรับปรุงแก้ไขคือ ให้ปรับคำถามให้ชัดเจนเพื่อให้เข้าใจง่าย และเพิ่มเติมเงื่อนไขของ โจทย์ ดังนี้

- จาก พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ พร้อมอธิบายแสดงแนวคิด หรือให้เหตุผลประกอบ “ค่าทั่วไปของ θ ที่สอดคล้องกับสมการ $\sin\theta + \cos\theta = 0$ คือ $(3+4n)\frac{\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม”

- ปรับเป็น พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ พร้อมอธิบายแสดงแนวคิด หรือให้เหตุผลประกอบ “ค่าทั่วไปของ θ ที่สอดคล้องกับสมการ $\sin\theta + \cos\theta = 0$ คือ $\frac{3\pi}{4} + \frac{n\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม”

3.8 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มาปรับปรุงตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ จากนั้นเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

3.9 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผ่านการปรับปรุงแล้ว ไปทดลองใช้ (Try out) กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 49 คน ของโรงเรียนชลกันยานุกูล อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 แล้วนำผลมาวิเคราะห์คุณภาพของแบบทดสอบ ดังนี้

1) หาความยากง่าย (P_D) ของแบบทดสอบรายข้อ แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.2-0.8

2) หาค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบเป็นรายข้อ แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่าอำนาจจำแนกที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป

3.10 คัดเลือกข้อสอบที่ผ่านการตรวจสอบคุณภาพแล้วซึ่งตรงตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ได้กำหนดไว้ จำนวน 6 ข้อ มีความยากง่าย (P_D) เท่ากับ 0.43-0.71 และค่าอำนาจจำแนก (D) เท่ากับ 0.23-0.75 จากนั้นนำมาหาค่าความเที่ยงของแบบทดสอบ (Reliability) โดยใช้สูตร

การหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α – Coefficient) ของครอนบัก มีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.76

3.11 จัดทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์แล้วนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

การดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงกึ่งทดลอง เพื่อศึกษาผลการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งผู้วิจัยใช้แผนการศึกษาค้นคว้าแบบวิจัยเชิงกึ่งทดลองที่มีการวัดผลหลังทดลองครั้งเดียว (One-group posttest-only design) (องอาจ นัยพัฒน์, 2551, หน้า 270) ซึ่งมีแบบแผนการวิจัย ดังตารางที่ 3-6

ตารางที่ 3-6 แบบแผนการวิจัยศึกษากลุ่มเดียว วัดหลังการทดลองครั้งเดียว

การจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน	การสอบหลังการทดลอง (Post-test)
X	O

สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการวิจัย

- เมื่อ X แทน การจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน
 O แทน การสอบหลังการทดลอง (Post-test)

การเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ขอความร่วมมือกับโรงเรียนชลกันยานุกูล อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่างในงานวิจัยในครั้งนี้ โดยผู้วิจัยดำเนินการสอนด้วยตนเองด้วยการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

2. ดำเนินการการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ซึ่งใช้เวลาในการสอน 12 คาบ

3. เมื่อดำเนินการสอนครบตามแผนเรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยทำการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ แล้วบันทึกผลการทดสอบเป็นคะแนนหลังเรียน โดยใช้เวลาในการดำเนินการทดสอบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จำนวน 1 คาบ และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จำนวน 1 คาบ
4. ตรวจสอบให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยใช้เกณฑ์การให้คะแนนที่กำหนดไว้
5. ผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้ไปวิเคราะห์ผลและแปลผลข้อมูลต่อไป

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ ในการวิเคราะห์ข้อมูลของการวิจัย ผู้วิจัยได้นำคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยมีลำดับขั้นตอนในการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1.1 เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ กับเกณฑ์ที่ร้อยละ 70 โดยใช้สถิติ t-test for one sample

1.2 เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ กับเกณฑ์ที่ร้อยละ 70 โดยใช้สถิติ t-test for one sample

2. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ ดำเนินการสรุปและวิเคราะห์ข้อมูลจากแบบบันทึกหลังการสอนของผู้สอน จากการตรวจใบงาน/ ใบกิจกรรม และแบบฝึกหัดของนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างแล้วนำข้อมูลที่ได้อาสรุป และนำเสนอความสามารถในการแก้ปัญหาและให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในลักษณะพรรณนาความ

2.1 อ่านข้อมูลในแบบบันทึกหลังการสอนของผู้สอน จากการตรวจใบงาน/ ใบกิจกรรม และแบบฝึกหัดของนักเรียน

2.2 นำข้อมูลจากแบบบันทึกหลังการสอนของผู้สอน จากการตรวจใบงาน/ ใบกิจกรรม และแบบฝึกหัดของนักเรียนมาพิจารณา ดังนี้

2.2.1 นำข้อมูลเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมาพิจารณา โดยแบ่งพิจารณาเป็น 4 ด้าน คือ การทำความเข้าใจปัญหา การวางแผนการแก้ปัญหา การดำเนินการตามแผน และการสรุปคำตอบ

2.2.2 นำข้อมูลเกี่ยวกับความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมาพิจารณาโดยแบ่งพิจารณาเป็น 2 ด้าน คือ ด้านการอธิบาย แสดงแนวคิด การอ้างอิงเหตุผลประกอบ และด้านการแสดงข้อสรุปของคำตอบที่สมเหตุสมผล

2.3 พิจารณาข้อมูลในข้อ 2.2 ที่แสดงถึงพัฒนาการของผู้เรียนในด้านการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน แล้วสรุปผลจากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ในการวิจัยใช้สถิติ ดังต่อไปนี้

1. สถิติพื้นฐาน

1.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Mean) โดยคำนวณจากสูตร (ไชยยศ ไพวิทยศิริธรรม, 2555, หน้า 33)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

เมื่อ \bar{x} แทน ค่าเฉลี่ยคะแนนของกลุ่มตัวอย่าง

$\sum_{i=1}^n x_i$ แทน ผลรวมของคะแนนทั้งหมด

n แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

1.2 ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน สามารถคำนวณได้จากสูตร (ไชยยศ ไพวิทยศิริธรรม, 2555, หน้า 50)

$$s = \sqrt{\frac{n \sum x^2 - (\sum x)^2}{n(n-1)}}$$

เมื่อ s แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน

x แทน คะแนนของนักเรียนแต่ละคน

$\sum x$ แทน ผลรวมของคะแนนทั้งหมด

$(\sum x)^2$ แทน ผลรวมของคะแนนทั้งหมดยกกำลังสอง

$\sum x^2$ แทน ผลรวมคะแนนแต่ละตัวยกกำลังสอง

n แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

2. สถิติเพื่อหาคุณภาพเครื่องมือในการทำวิจัย

2.1 หาค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา และให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยคำนวณจากสูตร (เวชฤทธิ์ อังกะนภัทรขจร, 2555, หน้า 160)

$$IOC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ IOC แทน ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อมูลกับจุดประสงค์
 $\sum R$ แทน ผลรวมของคะแนนความสอดคล้องตามการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ
 N แทน จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

2.2 วิเคราะห์หาค่าความยากง่าย (P_D) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยใช้การวิเคราะห์ข้อสอบแบบอัตนัย โดยเรียงคะแนนจากน้อยไปมากหรือจากมากไปน้อย แล้วแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มเก่งและกลุ่มอ่อน โดยใช้เทคนิค 25% แล้วใช้สูตรคำนวณของ ดี อาร์ ไวทนี และ ดี แอล ซาเบอร์ส (D.R. Whitney & D.L. Sabers อ้างถึงใน พิชิต ฤทธิ์จรูญ, 2548, หน้า 149)

ค่าความยากง่าย

$$P_D = \frac{S_U + S_L - (2NX_{\min})}{2N(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ P_D แทน ค่าความยากง่ายของแบบทดสอบแต่ละข้อ
 S_U แทน ผลรวมของคะแนนกลุ่มเก่ง
 S_L แทน ผลรวมของคะแนนกลุ่มอ่อน
 N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มเก่งหรือกลุ่มอ่อน
 X_{\max} แทน คะแนนสูงสุด
 X_{\min} แทน คะแนนต่ำสุด

ค่าอำนาจจำแนก

$$D = \frac{S_U - S_L}{N(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ	D	แทน	ค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบแต่ละข้อ
	S_U	แทน	ผลรวมของคะแนนกลุ่มเก่ง
	S_L	แทน	ผลรวมของคะแนนกลุ่มอ่อน
	N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มเก่งหรือกลุ่มอ่อน
	X_{\max}	แทน	คะแนนสูงสุด
	X_{\min}	แทน	คะแนนต่ำสุด

2.4 วิเคราะห์หาค่าความเที่ยงของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา และให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยใช้การวิเคราะห์ข้อสอบแบบอัตนัย โดยใช้สูตรการหาค่าสัมประสิทธิ์ (α - Coefficient) ของครอนบัก คำนวณดังนี้ (เวชฤทธิ์ อังกะระภัทรขจร, 2555, หน้า 161)

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^k S_i^2}{S_t^2} \right]$$

เมื่อ	α	แทน	ค่าความเที่ยงของแบบทดสอบ
	k	แทน	จำนวนข้อของแบบทดสอบ
	S_i^2	แทน	ความแปรปรวนของข้อสอบในแต่ละข้อ
	S_t^2	แทน	ความแปรปรวนของข้อสอบทั้งหมด

3. สถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐาน

เปรียบเทียบคะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หลังได้รับการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน กับเกณฑ์ที่ร้อยละ 70 โดยใช้สูตร t-test for one sample ดังนี้ (ไชยยศ ไพวิทยศิริธรรม, 2555, หน้า 86)

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, df = n - 1$$

เมื่อ t	แทน	ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน $t - distribution$
\bar{x}	แทน	ค่าเฉลี่ยของคะแนน
μ_0	แทน	ค่าเฉลี่ยมาตรฐานที่ใช้เป็นเกณฑ์ (ร้อยละ 70)
s	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง
\sqrt{n}	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ในการวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวน สอบสวนที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีการนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลดังต่อไปนี้

1. สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล
2. ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

การเสนอผลการวิจัยเพื่อให้เกิดความเข้าใจตรงกัน ผู้วิจัยกำหนดสัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อการเสนอผลการวิจัย ดังนี้

- n แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง
 \bar{X} แทน ค่าเฉลี่ยคะแนนของกลุ่มตัวอย่าง
 S แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง
 t แทน ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t -distribution
 p แทน ระดับนัยสำคัญทางสถิติ
 μ แทน ค่าเฉลี่ยที่ใช้เป็นเกณฑ์ (ร้อยละ 70)
* แทน มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
 df แทน องศาความอิสระ

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยแบ่งการนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล ออกเป็น 2 ตอน คือ ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และ ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยมีรายละเอียด ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/7 หลังจากได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนกับเกณฑ์ที่ร้อยละ 70 ซึ่งคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้จากการตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยมีคะแนนดิบรายบุคคลแสดงด้วยแผนภาพลำต้นและใบ ดังภาพที่ 4-1

1	39
2	0 1 4 5
3	0 0 0 0 1 1 1 2 3 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 9
4	0 0 0 1

ภาพที่ 4-1 คะแนนดิบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์รายบุคคล

หมายเหตุ จากงานแสดงลำต้นและใบ ตัวเลขในช่องซ้ายเป็นตัวเลขในหลักสิบของคะแนนดิบ และตัวเลขในช่องขวาเป็นตัวเลขในหลักหน่วยของคะแนนดิบ ตัวอย่างเช่น ข้อมูลในแถวที่ 2 มีนักเรียนได้คะแนน 20, 21, 24 และคะแนนสุดท้ายคือ 25

จากแผนภาพลำต้นและใบ พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีคะแนนการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อยู่ในช่วง 30-39 คะแนน

ซึ่งผลการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ด้วยสถิติ t-test แบบ one sample ผลปรากฏดังตารางที่ 4-1

ตารางที่ 4-1 ค่าเฉลี่ย และค่าสถิติทดสอบที ของคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

การทดสอบ	n	df	μ (ร้อยละ 70)	\bar{x} (คะแนนเต็ม 42)	S	t	p
คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	50	49	29.4	33.36	5.73	4.886*	.000

* $p < .05$

จากตารางที่ 4-1 พบว่าค่าเฉลี่ยของคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน สูงกว่าเกณฑ์ที่ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานการวิจัยข้อที่ 1

นอกจากนี้เมื่อพิจารณาพัฒนาการของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียน หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน พบว่า นักเรียนมีพัฒนาการของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาตามลักษณะของขั้นตอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

ในช่วงแรกของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน (แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1-2) ผู้วิจัยพบว่า นักเรียนร้อยละ 60 สามารถดำเนินการตามขั้นตอนการแก้ปัญหาได้ถูกต้องครบถ้วน แต่นักเรียนส่วนที่เหลือยังไม่สามารถดำเนินการตามขั้นตอนการแก้ปัญหาได้ เช่น เมื่อครูนำเสนอสถานการณ์ปัญหา “รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน AB ยาวเท่ากับ 9 หน่วย ด้าน BC ยาวเท่ากับ 12 หน่วย และด้าน AC ยาวเท่ากับ 15 หน่วย จงหาค่า $\cos(A - C)$, $\sin(A+C)$ และ $\tan(A-C)$ ” และครูให้นักเรียนดำเนินการตามขั้นตอนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน คือ 1) ขั้นทำความเข้าใจปัญหา 2) ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา 3) ขั้นดำเนินการตามแผน และ 4) ขั้นการสรุปคำตอบ พบว่า ในขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เมื่อนักเรียนอ่านหรือวิเคราะห์โจทย์ปัญหา นักเรียนร้อยละ 80 สามารถตอบได้ว่าโจทย์ถามอะไรและกำหนดอะไรมาให้ คือนักเรียนตอบได้ว่า สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน AB ยาวเท่ากับ 9 หน่วย ด้าน BC ยาวเท่ากับ 12 หน่วย และด้าน AC ยาวเท่ากับ 15 หน่วย และสิ่งที่โจทย์ถาม คือ $\cos(A - C)$, $\sin(A+C)$ และ $\tan(A-C)$ ส่วนนักเรียนที่เหลือบางคน ไม่สามารถระบุ

สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ได้ หรือระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ได้ไม่ครบถ้วน แต่จะสามารถระบุสิ่งที่โจทย์ถามได้ เช่น นักเรียนตอบว่า สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่ รูปสามเหลี่ยม ABC เท่านั้น

ขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา นักเรียนบางส่วนยังไม่สามารถวางแผนการแก้ปัญหาได้ หรือไม่สามารหาคความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ทั้งที่เป็นสิ่งที่กำหนดให้และข้อมูลที่เป็นผลตามมาจากสิ่งที่กำหนดให้ เช่น จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เมื่อครูให้นักเรียนแสดงความสัมพันธ์ออกมาเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก พบว่า นักเรียนบางส่วนยังแสดงความสัมพันธ์ออกมาเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ในลักษณะที่ระบุด้านและมุมไม่ถูกต้อง ซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาได้ไม่ถูกต้องในขั้นที่ 3 ซึ่งคือ ขั้นดำเนินการตามแผน เพราะเมื่อนักเรียนแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ได้ไม่ถูกต้องจึงทำให้นักเรียนแทนค่าและคำนวณผิดพลาดไปด้วย นอกจากนั้นยังทำให้นักเรียนสรุปคำตอบในขั้นที่ 4 ขั้นการสรุปคำตอบ ได้ไม่ถูกต้องอีกด้วย

ต่อมาเมื่อจัดกิจกรรมการเรียนรู้จนถึงแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3-4 นักเรียนร้อยละ 80 สามารถดำเนินการตามขั้นตอนการแก้ปัญหาได้ดีขึ้น โดยพิจารณาการดำเนินการตามขั้นตอนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน จากสถานการณ์ปัญหาที่ครูนำเสนอ เช่น ครูนำเสนอสถานการณ์ปัญหา “รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{AB} และ \overline{AC} ยาวด้านละ $\sqrt{3}$ และ 2 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\widehat{ACB} = 60^\circ$ และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{DE} และ \overline{DF} ยาวด้านละ 3 และ 5 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\widehat{DFE} = 37^\circ$ จงหาค่า $\sin(60^\circ + 37^\circ)$ ” และครูให้นักเรียนดำเนินการตามขั้นตอนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน ในขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ปรากฏว่านักเรียนทุกคนสามารถตอบได้ว่า สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{AB} ยาว $\sqrt{3}$ หน่วย และ \overline{AC} ยาว 2 หน่วย และมีมุม $\widehat{ACB} = 60^\circ$ และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{DE} ยาว 3 หน่วย และ \overline{DF} ยาว 5 หน่วย และมีมุม $\widehat{DFE} = 37^\circ$ และสิ่งที่โจทย์ถาม คือ ค่าของ $\sin(60^\circ + 37^\circ)$ ในขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา นักเรียนร้อยละ 80 สามารถวางแผนการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม จึงทำให้นักเรียนสามารถดำเนินการแก้ปัญหา ในขั้นที่ 3 ขั้นการดำเนินการตามแผนได้อย่างถูกต้อง คือนักเรียนสามารถแทนค่าสูตรและแสดงการคำนวณได้อย่างถูกต้องชัดเจน จะมีนักเรียนจำนวนน้อยที่มีแทนค่าและการคำนวณที่ผิดพลาด และในขั้นที่ 4 ขั้นสรุปคำตอบ นักเรียนที่มีการแทนค่าและคำนวณค่าถูกต้องก็สามารถสรุปคำตอบของสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้องครบถ้วนเช่นกัน

เมื่อนักเรียนผ่านกระบวนการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน จนถึงแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5-6 พบว่า นักเรียนสามารถดำเนินการตามขั้นตอนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนได้ดี มีการคิดอย่างเป็นระบบ สามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพและ

นักเรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนการแก้ปัญหาไปใช้ในการหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ถูกต้อง พิจารณาได้จากการทำแบบฝึกหัดและใบกิจกรรมของนักเรียน นักเรียนสามารถตอบคำถามได้ครบถ้วน เมื่อครูใช้คำถามนำเกี่ยวกับขั้นตอนการแก้ปัญหาทั้ง 4 ขั้นตอน โดยเฉพาะในขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา นักเรียนสามารถตอบสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่โจทย์ถามได้อย่างครบถ้วน ในขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา นักเรียนก็สามารถหาความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ทั้งที่เป็นสิ่งที่กำหนดให้และข้อมูลที่เป็นผลตามมาจากสิ่งที่กำหนดให้ และวางแผนการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสมกับสถานการณ์ปัญหา ส่งผลให้ในขั้นที่ 3 ขั้นตอนการดำเนินการตามแผน นักเรียนก็สามารถดำเนินการตามแผนได้อย่างถูกต้องด้วย โดยนักเรียนส่วนใหญ่ก็สามารถปฏิบัติในส่วนของขั้นที่ 2 และขั้นที่ 3 ได้อย่างดีเยี่ยม รวมทั้งขั้นตอนที่ 4 คือขั้นสรุปคำตอบ นักเรียนก็สามารถสรุปคำตอบของสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้องครบถ้วนเช่นกัน

นอกจากนี้รายละเอียดของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สามารถจำแนกนักเรียนตามลักษณะของขั้นตอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังต่อไปนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา สามารถจำแนกนักเรียนได้เป็น 3 กลุ่ม ดังนี้

นักเรียนในกลุ่มที่ 1 ได้คะแนน 0 คะแนน คือ นักเรียนที่ไม่สามารถระบุได้ว่าปัญหาถามอะไร กำหนดอะไรมาบ้าง และมีเงื่อนไขอย่างไร

โดยในการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ครั้งนี้ไม่มีนักเรียนคนใดที่จัดอยู่ในกลุ่มนี้

นักเรียนในกลุ่มที่ 2 ได้คะแนน 1 คะแนน คือ นักเรียนที่สามารถระบุได้ถูกต้องบางส่วนว่าปัญหาถามอะไร กำหนดอะไรมาบ้าง และมีเงื่อนไขอย่างไร โดยมีตัวอย่างลักษณะของคำตอบจากตัวอย่างโจทย์ “รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน AB ขาวเท่ากับ 3 หน่วย ด้าน BC ขาวเท่ากับ 4 หน่วย และด้าน AC ขาวเท่ากับ 5 หน่วย จงหาค่า $\cos(A-C)$ และ $\sin(A-C)$ ” พบว่า นักเรียนสามารถระบุได้เพียงสิ่งที่โจทย์ถาม แต่นักเรียนไม่สามารถระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ ซึ่งเป็นการระบุได้ถูกต้องเพียงบางส่วน แสดงดังภาพที่ 4-2

1. ชั้นทำความเข้าใจปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่.....

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ..... $\cos(A-C)$ และ $\sin(A-C)$

ภาพที่ 4-2 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 2 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นทำความเข้าใจปัญหา

นักเรียนในกลุ่มที่ 3 ได้คะแนน 2 คะแนน คือ นักเรียนที่สามารถระบุได้อย่างถูกต้องว่าปัญหาถามอะไร กำหนดอะไรมาบ้าง และมีเงื่อนไขอย่างไร โดยมีตัวอย่างลักษณะของคำตอบจากตัวอย่างโจทย์ “รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน AB ยาวเท่ากับ 3 หน่วย ด้าน BC ยาวเท่ากับ 4 หน่วย และด้าน AC ยาวเท่ากับ 5 หน่วย จงหาค่า $\cos(A-C)$ และ $\sin(A-C)$ ” พบว่า นักเรียนสามารถระบุได้อย่างถูกต้องครบถ้วน ทั้งสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่โจทย์ถาม แสดงดังภาพที่ 4-3

1. ชั้นทำความเข้าใจปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่ AB ยาว 3 BC ยาว 4 AC ยาว 5

ABC เป็น Δ มุมฉาก

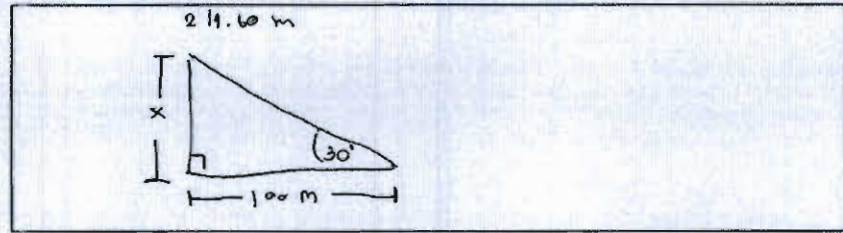
สิ่งที่โจทย์ถาม คือ..... $\cos(A-C)$ และ $\sin(A-C)$

ภาพที่ 4-3 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 3 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นทำความเข้าใจปัญหา

2. ชั้นวางแผนการแก้ปัญหา สามารถจำแนกนักเรียนได้เป็น 3 กลุ่ม ดังนี้

นักเรียนในกลุ่มที่ 1 ได้คะแนน 0 คะแนน คือ นักเรียนที่ไม่สามารถแสดงความสัมพันธ์ต่าง ๆ จากข้อมูลหรือเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้ หรือเลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ไม่ถูกต้อง โดยมีตัวอย่างลักษณะของคำตอบจากตัวอย่างโจทย์ “นิมยยืนอยู่บนคาบฟ้าตึกหลังหนึ่ง มองเห็นรถยนต์เป็นมุมก้ม 30 องศา และรถยนต์จอดอยู่ริมถนนในแนวเดียวกับตึก ถ้ารถยนต์อยู่ห่างจากตึก 100 เมตร จงหาหาความสูงของตึกนี้ เมื่อนิมยสูง 1.60 เมตร (กำหนด $\sqrt{3} = 1.732$)” พบว่านักเรียนแสดงความสัมพันธ์ต่าง ๆ จากข้อมูลหรือเงื่อนไขที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมไม่ถูกต้อง ทำให้นักเรียนเลือกวางแผนการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง แสดงดังภาพที่ 4-4

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ขั้ววางแผนการแก้ปัญหา

$$\cot 30^\circ = \frac{x}{100}$$

$$\frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{x}{100}$$

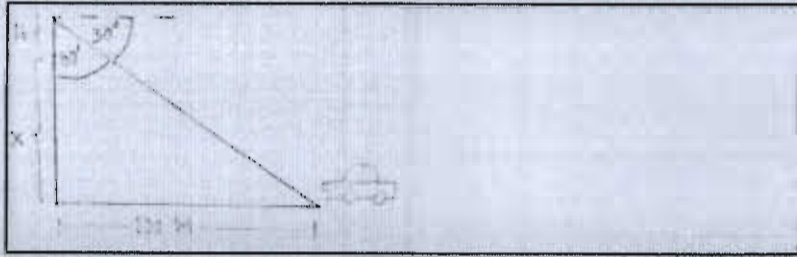
$$\sqrt{3} = \frac{x}{100}$$

ภาพที่ 4-4 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 1 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ขั้ววางแผนการแก้ปัญหา

นักเรียนในกลุ่มที่ 2 ได้คะแนน 1 คะแนน คือ นักเรียนที่สามารถแสดงความสัมพันธ์ต่างๆ จากข้อมูลหรือเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง แต่เลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ไม่เหมาะสมหรือไม่ครอบคลุมประเด็นของปัญหา โดยมีตัวอย่างลักษณะของคำตอบ จากตัวอย่าง โจทย์ “นิมยยืนอยู่บนดาดฟ้าตึกหลังหนึ่ง มองเห็นรถยนต์เป็นมุมก้ม 30 องศา และรถยนต์จอดอยู่ริมถนนในแนวเดียวกับตึก ถ้ารถยนต์อยู่ห่างจากตึก 100 เมตร จงหาหาความสูงของตึกนี้ เมื่อนิมยสูง 1.60 เมตร (กำหนด $\sqrt{3} = 1.732$)” พบว่า นักเรียนที่สามารถแสดงความสัมพันธ์ต่างๆ จากข้อมูลหรือเงื่อนไขที่กำหนดให้ให้เป็นรูปสามเหลี่ยมได้ถูกต้อง แต่เลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ไม่เหมาะสมคือนักเรียนเลือกใช้ $\tan 30^\circ = \frac{100}{x + 1.6}$ แต่วิธีการแก้ปัญหาที่ถูกต้องคือ

$$\tan 60^\circ = \frac{100}{x + 1.6} \text{ แสดงดังภาพที่ 4-5}$$

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ขั้ววางแผนการแก้ปัญหา

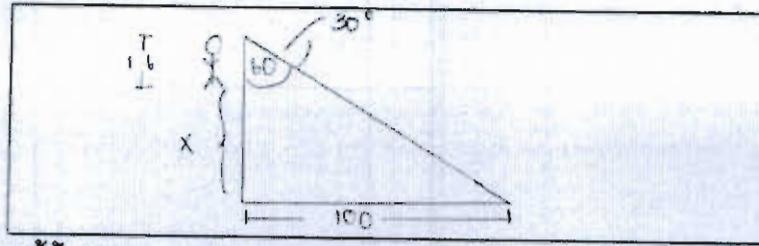
$$\text{จ: ได้ } \tan 30^\circ = \frac{100}{x + 1.6}$$

$$\sqrt{3} = \frac{100}{x + 1.6}$$

ภาพที่ 4-5 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 2 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ขั้ววางแผนการแก้ปัญหา

นักเรียนในกลุ่มที่ 3 ได้คะแนน 2 คะแนน คือ นักเรียนที่แสดงความสัมพันธ์ต่างๆ จากข้อมูลหรือเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง และเลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ถูกต้องเหมาะสมสอดคล้องกับปัญหา จากตัวอย่างโจทย์ “นิยมนยืนอยู่บนดาดฟ้าตึกหลังหนึ่ง มองเห็นรถยนต์เป็นมุมก้ม 30 องศา และรถยนต์จอดอยู่ริมถนนในแนวเดียวกับตึก ถ้ารถยนต์อยู่ห่างจากตึก 100 เมตร จงหาหาความสูงของตึกนี้ เมื่อนิยมนสูง 1.60 เมตร (กำหนด $\sqrt{3} = 1.732$)” พบว่า นักเรียนที่สามารถแสดงความสัมพันธ์ต่างๆ จากข้อมูลหรือเงื่อนไขที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมได้ถูกต้อง และเลือกวิธีการแก้ปัญหาได้ถูกต้องเหมาะสมคือ $\tan 60^\circ = \frac{100}{x + 1.6}$ แสดงดังภาพที่ 4-6

จากสิ่งทีโจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ชั้นวางแผนการแก้ปัญหา

นำถ.ไปใช้
 $\tan 30^\circ = \frac{100}{x + 1.6}$
 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{100}{x + 1.6}$

ภาพที่ 4-6 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 3 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นวางแผนการแก้ปัญหา

3. ชั้นดำเนินการตามแผน สามารถจำแนกนักเรียนได้เป็น 3 กลุ่ม ดังนี้

นักเรียนในกลุ่มที่ 1 ได้คะแนน 0 คะแนน คือ นักเรียนที่นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดงลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหา จากตัวอย่าง โจทย์ “รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{AB} และ \overline{BC} ยาวด้านละ 15 และ 36 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\hat{A}CB = \theta$ และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{DE} และ \overline{EF} ยาวด้านละ 8 และ 15 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\hat{D}FE = \alpha$ จงหาค่า $\cos\left(\arcsin \frac{15}{39} - \arccos \frac{15}{17}\right)$ ” พบว่า นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาได้ไม่ถูกต้อง เมื่อพิจารณาจากบรรทัดแรกจะพบว่านักเรียนเปลี่ยนรูป $\cos\left(\arcsin \frac{15}{39} - \arccos \frac{15}{17}\right)$ เป็น $\cos(\theta + \alpha)$ ซึ่งไม่ถูกต้อง โดยที่ถูกต้องคือ $\cos\left(\arcsin \frac{15}{39} - \arccos \frac{15}{17}\right) = \cos(\theta - \alpha)$ และนอกจากนี้จากบรรทัดที่ 1 ไปบรรทัดที่ 2 นักเรียนยังมีการแทนค่าสูตรไม่ถูกต้องด้วย คือนักเรียนใช้สูตร $\cos(\theta + \alpha) = \sin \cos + \cos \sin$ โดยที่ถูกต้องคือ $\cos(\theta - \alpha) = \cos\theta \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha$ แสดงดังภาพที่ 4-7

3. ขั้นตอนการแก้ปัญหา

$$\begin{aligned} \text{คำตอบ} &= \cos\left(\arcsin \frac{16}{39} - \arccos \frac{16}{17}\right) = \cos(\theta - \phi) \\ &= \sin\theta \cos\phi + \cos\theta \sin\phi \\ &= \left(\frac{16}{39}\right)\left(\frac{15}{17}\right) + \left(\frac{16}{17}\right)\left(\frac{5}{17}\right) \\ &= \left(\frac{16}{17}\right)\left(\frac{10}{17}\right) \\ &= 0.096 + 0.415 \\ &= 0.135 \end{aligned}$$

ภาพที่ 4-7 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 1 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนการแก้ปัญหา

นักเรียนในกลุ่มที่ 2 ได้คะแนน 1 คะแนน คือ นักเรียนที่นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้อง แต่การแสดงลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหายังไม่ชัดเจน หรือมีการแทนค่า หรือคำนวณที่ผิดพลาด จากตัวอย่างโจทย์ “รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน AB ยาวเท่ากับ 3 หน่วย ด้าน BC ยาวเท่ากับ 4 หน่วย และด้าน AC ยาวเท่ากับ 5 หน่วย จงหาค่า $\cos(A-C)$ และ $\sin(A-C)$ ” พบว่า นักเรียนสามารถนำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้อง เมื่อพิจารณาจากการหาค่า $\sin(A-C)$ พบว่า นักเรียนใช้สูตรได้ถูกต้อง คือ $\sin(A-C) = \sin A \cos C - \cos A \sin C$ แต่นักเรียนมีการแทนค่า $\sin C$ ไม่ถูกต้อง เพราะนักเรียนแทนค่า $\sin C$ ด้วย $\frac{BC}{AC}$ ซึ่งเท่ากับ $\frac{4}{5}$ โดยการแทนค่า $\sin C$ ที่ถูกต้องคือ ต้องแทนค่า $\sin C$ ด้วย $\frac{AB}{AC}$ ซึ่งเท่ากับ $\frac{3}{5}$ แสดงดังภาพที่ 4-8

3. ขั้นตอนการแก้ปัญหา

$$\begin{aligned} \text{หาค่า } &\cos(A-C) \text{ , } \sin(A-C) \\ \text{จะได้ } &\cos(A-C) = \cos A \cos C + \sin A \sin C \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) \\ &= \frac{12}{25} + \frac{12}{25} = \frac{24}{25} \\ \text{จะได้ } &\sin(A-C) = \sin A \cos C - \cos A \sin C \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) \\ &= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25} \end{aligned}$$

ภาพที่ 4-8 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 2 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนการแก้ปัญหา

นักเรียนในกลุ่มที่ 3 ได้คะแนน 2 คะแนน คือ นักเรียนที่นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้อง และแสดงการแก้ปัญหาเป็นลำดับขั้นตอนได้อย่างชัดเจน จากตัวอย่างโจทย์
 “รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน AB ยาวเท่ากับ 3 หน่วย ด้าน BC ยาวเท่ากับ 4 หน่วย และด้าน AC ยาวเท่ากับ 5 หน่วย จงหาค่า $\cos(A-C)$ และ $\sin(A-C)$ ” พบว่า นักเรียนสามารถนำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้อง และแสดงการแก้ปัญหาเป็นลำดับขั้นตอนได้อย่างชัดเจน แสดงดังภาพที่ 4-9

3. ขั้นตอนการแก้ปัญหา

$$\begin{aligned} \text{หาค่า } \cos(A-C) &= \cos A \cos C + \sin A \sin C \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{12}{25} + \frac{12}{25} = \frac{24}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{หาค่า } \sin(A-C) &= \sin A \cos C - \cos A \sin C \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25} \end{aligned}$$

ภาพที่ 4-9 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 3 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนการแก้ปัญหา

4. ขั้นการสรุปคำตอบ สามารถจำแนกนักเรียนได้เป็น 2 กลุ่ม ดังนี้

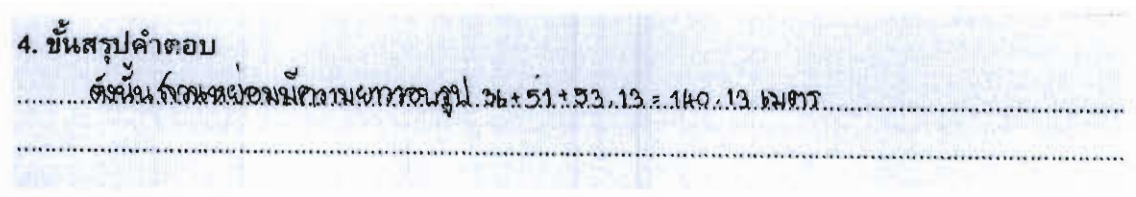
นักเรียนในกลุ่มที่ 1 ได้คะแนน 0 คะแนน คือ นักเรียนที่ไม่แสดงการสรุปคำตอบ หรือสรุปคำตอบไม่ถูกต้อง จากตัวอย่างโจทย์ “รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน AB ยาวเท่ากับ 3 หน่วย ด้าน BC ยาวเท่ากับ 4 หน่วย และด้าน AC ยาวเท่ากับ 5 หน่วย จงหาค่า $\cos(A-C)$ และ $\sin(A-C)$ ” พบว่า นักเรียนตอบเพียงตัวเลขที่เป็นคำตอบ โดยไม่แสดงการสรุปคำตอบว่าคำตอบที่ตอบมาเป็นคำตอบของสิ่งที่โจทย์ถามว่าอย่างไร แสดงดังภาพที่ 4-10

4. ขั้นสรุปคำตอบ

$$\frac{144}{25} \rightarrow \frac{7}{5}$$

ภาพที่ 4-10 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 1 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ขั้นการสรุปคำตอบ

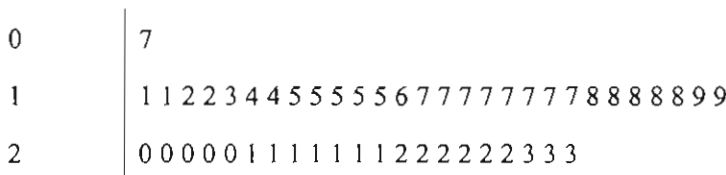
นักเรียนในกลุ่มที่ 2 ได้คะแนน 1 คะแนน คือ นักเรียนที่สามารถสรุปคำตอบได้ถูกต้อง สมบูรณ์ จากตัวอย่างโจทย์ “สวนหย่อมรูปสามเหลี่ยมมีมุมมุมหนึ่งขนาด 73 องศา ด้านประกอบ มุมนี้ยาว 36 เมตร และ 51 เมตร จงหาว่าสวนหย่อมมีความยาวรอบรูปเท่าไร (กำหนด $\cos 73^\circ = 0.2924$)” พบว่า นักเรียนสามารถสรุปคำตอบได้ถูกต้องและสมบูรณ์ตรงตาม สิ่งที่โจทย์ถาม แสดงดังภาพที่ 4-11



ภาพที่ 4-11 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 2 ด้านความสามารถในการแก้ปัญหา ทางคณิตศาสตร์ ชั้นการสรุปคำตอบ

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/ 7 หลังจากได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนกับเกณฑ์ที่ร้อยละ 70 ซึ่งคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ได้จากการตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้ เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยใช้เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยมีคะแนนดิบรายบุคคลแสดงด้วยแผนภาพลำต้นและใบ ดังภาพที่ 4-12



ภาพที่ 4-12 คะแนนดิบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์รายบุคคล

หมายเหตุ จากงานแสดงลำดับและใบ ตัวเลขในช่องซ้ายเป็นตัวเลขในหลักสิบของคะแนนดิบ และตัวเลขในช่องขวาเป็นตัวเลขในหลักหน่วยของคะแนนดิบ ตัวอย่าง เช่น ข้อมูลในแถวที่ 2 มีนักเรียนได้คะแนน 11, 11, 12, 12, 13 และคะแนนสุดท้ายคือ 19

จากแผนภาพลำดับและใบ พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีคะแนนการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในช่วง 11-19 คะแนน

ซึ่งผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ด้วยสถิติ t-test แบบ one sample ผลปรากฏดังตารางที่ 4-2

ตารางที่ 4-2 ค่าเฉลี่ย และค่าสถิติทดสอบที ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

การทดสอบ	<i>n</i>	<i>df</i>	μ (ร้อยละ 70)	\bar{X} (คะแนนเต็ม 24)	<i>S</i>	<i>t</i>	<i>p</i>
คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	50	49	16.8	17.94	3.67	2.195*	.0165

* $p < .05$

จากตารางที่ 4-2 พบว่าค่าเฉลี่ยของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนสูงกว่าเกณฑ์ที่ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานการวิจัยข้อที่ 2

นอกจากนี้เมื่อพิจารณาพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน พบว่า นักเรียนมีพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาจากการอธิบาย แสดงแนวคิด การอ้างอิงเหตุผลประกอบของนักเรียนดังนี้

ในช่วงแรกของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน (แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1-2) ผู้วิจัยพบว่า เมื่อครูใช้คำถามนำกับนักเรียนร้อยละ 50 สามารถแสดงการอธิบาย แสดงแนวคิด การอ้างอิงเหตุผลประกอบคำตอบของตนเองได้อย่างถูกต้องเหมาะสม เช่น ในขั้นการสังเกต เมื่อครูถามคำถามนำว่า “ฟังก์ชัน $y = \sin x$, $y = \cos x$ และ $y = \tan x$ เป็น

ฟังก์ชัน 1-1 หรือไม่ และตัวผกผันของฟังก์ชัน $y = \sin x$, $y = \cos x$ และ $y = \tan x$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด” นักเรียนจะสามารถตอบได้ว่า “ฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ คือสมาชิกตัวหน้าจะซ้ำกันเป็นช่วง จึงทำให้ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็นฟังก์ชันด้วย” แต่จะมีนักเรียนบางส่วนที่ยังไม่สามารถอธิบายแนวคิดหรือเหตุผลของตนเองได้ นักเรียนจะตอบเพียงแค่ว่า “เป็น” หรือ “ไม่เป็น” ฟังก์ชัน 1-1 โดยนักเรียนจะไม่อธิบายเหตุผลว่าเพราะเหตุใดจึงเป็นเช่นนั้น ครูจึงต้องกระตุ้นนักเรียน เช่น ให้นักเรียนสังเกตลักษณะของกราฟ $y = \sin x$, $y = \cos x$ และ $y = \tan x$ และเพิ่มคำถามนำอื่น ๆ เพิ่มเติม เพื่อนำนักเรียนไปสู่แนวทางการให้เหตุผลที่ถูกต้อง เช่นถามว่า “กราฟ $y = \sin x$, $y = \cos x$ และ $y = \tan x$ มีลักษณะเป็นอย่างไร” จากนั้นจึงถามว่า “ฟังก์ชัน $y = \sin x$, $y = \cos x$ และ $y = \tan x$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 หรือไม่ และตัวผกผันของฟังก์ชัน $y = \sin x$, $y = \cos x$ และ $y = \tan x$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด” อีกครั้ง

ต่อมาเมื่อจัดกิจกรรมการเรียนรู้จนถึงแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3-4 นักเรียนส่วนใหญ่เริ่มสามารถแสดงการอธิบาย แสดงแนวคิด การอ้างอิงเหตุผลประกอบของตนเองได้ดีขึ้น เช่นเมื่อครูใช้คำถามนำว่า “สมการที่นักเรียนทราบทั่วไปมีลักษณะอย่างไร และสมการตรีโกณมิติ ควรจะมีลักษณะเป็นอย่างไร เพราะเหตุใด” นักเรียนส่วนใหญ่ก็มีความพยายามที่จะตอบคำถามเหล่านี้พร้อมทั้งแสดงเหตุผลของตนเองว่าเพราะเหตุใดจึงคิดว่าคำตอบควรเป็นเช่นนั้น คือนักเรียนตอบว่า “สมการคือ ประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ที่ใช้แสดงว่าสองสิ่งเหมือนกัน หรือเทียบเท่ากันที่เชื่อมด้วยเครื่องหมายเท่ากับ ดังนั้นสมการตรีโกณมิติ คือสมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติปรากฏอยู่หรือเป็นองค์ประกอบในสมการนั้น เช่น $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ” แต่จะมีนักเรียนส่วนน้อยที่ตอบคำถามไม่ถูกต้อง เช่นตอบว่า “สมการคือการแทนค่าตัวแปรแล้วพจน์ฝั่งซ้ายเท่ากับฝั่งขวา” ครูจึงต้องใช้คำถามนำเพิ่มเติมเพื่อนำนักเรียนไปสู่แนวทางการตอบคำถามและให้เหตุผลที่ถูกต้องเช่นกัน

แต่เมื่อนักเรียนผ่านกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน จนถึงแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5-6 แล้ว พบว่า นักเรียนสามารถแสดงการอธิบาย แสดงแนวคิด การอ้างอิงเหตุผลประกอบของตนเองได้ดี เช่น ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 ซึ่งเป็นการจัดการเรียนรู้ที่ให้นักเรียนได้ทำกิจกรรมเป็นกลุ่ม ในขั้นการสังเกต เมื่อครูนำเสนอสถานการณ์ปัญหาการเชิญธงชาติของนักเรียน และครูใช้คำถามนำคือ “นักเรียนจะมีวิธีการหาความสูงของเสาธงได้อย่างไรบ้าง เพราะเหตุใดจึงเลือกใช้วิธีนั้น” “นักเรียนควรทราบอะไรบ้างจากสถานการณ์ปัญหานี้ที่จะช่วยให้ นักเรียนสามารถหาความสูงของเสาธงได้ เพราะเหตุใด” และ “นักเรียนจะมีวิธีการหาระยะระหว่างเสาธงกับนักเรียนที่เชิญธงชาติได้อย่างไรบ้าง เพราะเหตุใดจึงเลือกใช้วิธีนั้นหรือนักเรียนควรทราบอะไรบ้างจากสถานการณ์ปัญหานี้ที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถหาระยะระหว่างเสาธงกับนักเรียนที่

เชิญธงชาติได้ เพราะเหตุใด” พบว่านักเรียนในแต่ละกลุ่มร่วมกันเสนอความคิด รวมทั้งใช้เหตุผลมาอ้างอิงแนวคิดของตนเองประกอบ การแก้ปัญหาสถานการณ์ที่ครูกำหนดได้เป็นอย่างดี นอกจากนี้แล้วในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 นักเรียนยังได้ไปทำกิจกรรมกลุ่มนอกชั้นเรียน คือ การหาระยะทางและความสูงของสิ่งต่าง ๆ ภายในโรงเรียน นักเรียนได้สืบค้นและหาแนวทางแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง และได้ประยุกต์ใช้ความรู้ทั้งหมดจากบทเรียนที่ผ่านมาได้เป็นอย่างดี และเมื่อครูให้นักเรียนออกมานำเสนอวิธีการแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่ครูมอบหมาย ทำให้นักเรียนสามารถแสดงเหตุผลและสามารถอธิบาย แสดงแนวคิดของตนเอง รวมทั้งการอ้างอิงเหตุผลประกอบ และแสดงข้อสรุปของคำตอบของตนเองได้อย่างสมเหตุสมผล

นอกจากนี้รายละเอียดของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สามารถจำแนกนักเรียนตามลักษณะของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้ 5 กลุ่ม ดังต่อไปนี้

นักเรียนในกลุ่มที่ 1 ได้คะแนน 0 คะแนน คือ นักเรียนที่ไม่มีการอธิบายหรือแสดงแนวคิดประกอบคำตอบ หรือ ไม่มีการเขียนใด ๆ

โดยในการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ครั้งนี้ไม่มีนักเรียนคนใดที่จัดอยู่ในกลุ่มนี้

นักเรียนในกลุ่มที่ 2 ได้คะแนน 1 คะแนน คือ นักเรียนที่มีความพยายามอธิบายหรือแสดงแนวคิดประกอบการตัดสินใจ แต่นักเรียนไม่มีการแสดงข้อสรุป หรือแสดงข้อสรุปแต่ไม่สมเหตุสมผล จากตัวอย่างโจทย์ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ พร้อมอธิบายแสดงแนวคิดหรือให้เหตุผลประกอบ “ค่าทั่วไปของ θ ที่สอดคล้องกับสมการ $\tan\theta \sin\theta + \tan\theta = 0$ คือ $2n\pi$ หรือ $\frac{3\theta}{2} + 2n\theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม” พบว่า นักเรียนมีความพยายามอธิบายหรือแสดงแนวคิด แต่ยังไม่มีการแสดงข้อสรุปใด ๆ เนื่องจากนักเรียนควรแสดงข้อสรุปของคำตอบ คือ “จะได้ว่าค่าทั่วไปของ θ ที่สอดคล้องกับสมการ $\tan\theta \sin\theta + \tan\theta = 0$ คือ 0 และ $n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม แสดงว่าข้อความข้างต้นไม่เป็นจริง” แสดงดังภาพที่ 4-13

วิธีทำ

$$\text{จาก } \tan\theta \sin\theta + \tan\theta = 0$$

$$\tan(\sin\theta + 1) = 0$$

$$\text{จึงได้ } \tan\theta = 0 \quad \text{หรือ} \quad \sin\theta + 1 = 0$$

$$\text{ผลก่า } \theta = 0, \pi, 2\pi \quad \left| \quad \sin\theta = -1 \right.$$

$$\text{ผลก่า } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

ภาพที่ 4-13 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 2 ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

นักเรียนในกลุ่มที่ 3 ได้คะแนน 2 คะแนน คือ นักเรียนที่มีการอธิบายหรือการอ้างอิงแสดงแนวคิดประกอบการตัดสินใจ หรือแสดงข้อสรุปที่สมเหตุสมผลเพียงบางส่วน จากตัวอย่างโจทย์ จึงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ พร้อมอธิบายแสดงแนวคิด หรือให้เหตุผลประกอบ “ค่าทั่วไปของ θ ที่สอดคล้องกับสมการ $\tan\theta \sin\theta + \tan\theta = 0$ คือ $2n\pi$ หรือ $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม” พบว่า นักเรียนมีการอธิบายหรือแสดงแนวคิดประกอบการตัดสินใจของการหาค่า $\tan\theta = 0$ แล้วแสดงว่าค่า $\theta = 0, \pi, 2\pi$ เป็นการอธิบายที่สมเหตุสมผล แต่เมื่อพิจารณาการหาค่า $\sin\theta = -1$ แล้วแสดงว่าค่า $\theta = \frac{3\pi}{2}$ และนักเรียนอธิบายเพิ่มเติมว่า “แต่ $\frac{3\pi}{2} = \tan\theta \neq 1$ ” ยังเป็นการอธิบายที่ยังไม่ค่อยสมเหตุสมผล อีกทั้งนักเรียนยังมีการแสดงข้อสรุปที่ยังไม่ค่อยสมบูรณ์ คือนักเรียนสรุปว่า “จะได้ว่าค่าทั่วไปของ θ ที่สอดคล้องกับสมการ $\tan\theta \sin\theta + \tan\theta = 0$ คือ $2n\pi + 0, 2n\pi + \pi, 2n\pi + 2\pi$ ไม่เป็นจริง” เนื่องจากข้อสรุปของคำตอบที่ถูกต้องควรอธิบายว่า “จะได้ว่าค่าทั่วไปของ θ ที่สอดคล้องกับสมการ $\tan\theta \sin\theta + \tan\theta = 0$ คือ 0 และ $n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม แสดงว่าข้อความข้างต้นไม่เป็นจริง” แสดงดังภาพที่ 4-14

วิธีทำ

$$\tan\theta \sin\theta + \tan\theta = 0$$

$$\tan\theta (\sin\theta + 1) = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{จะได้ } \tan\theta = 0 \quad \text{หรือ} \quad \sin\theta + 1 = 0 \\ \text{แก้ค่า } \theta = 0, \pi, 2\pi \quad \left| \quad \text{แก้ค่า } \theta = \frac{3\pi}{2} \end{array}$$

$$\text{จะได้ค่า } \theta \text{ ที่สอดคล้องกับสมการ } \tan\theta \sin\theta + \tan\theta = 0 \text{ เป็น } 2n\pi + 0, 2n\pi + \pi, 2n\pi + 2\pi \text{ เมื่อ } n \in \mathbb{I}$$

ไม่พบวิธี

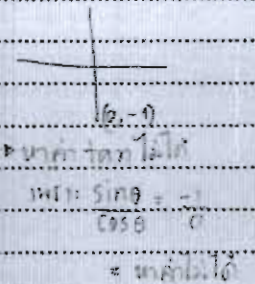
ภาพที่ 4-14 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 3 ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

นักเรียนในกลุ่มที่ 4 ได้คะแนน 3 คะแนน คือ นักเรียนที่มีการอธิบายแสดงแนวคิดหรือมีการอ้างอิงเหตุผลประกอบการตัดสินใจและแสดงข้อสรุปก่อนข้างสมเหตุสมผล หรือมีการแสดงแนวคิดการอ้างอิงเหตุผลผิดพลาดเล็กน้อย จากตัวอย่าง โจทย์ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ พร้อมอธิบายแสดงแนวคิด หรือให้เหตุผลประกอบ “ค่าทั่วไปของ θ ที่สอดคล้องกับสมการ $\tan\theta \sin\theta + \tan\theta = 0$ คือ $2n\pi$ หรือ $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม” พบว่า นักเรียนมีการเขียนอธิบายแสดงแนวคิดหรือมีการอ้างอิงเหตุผลประกอบการตัดสินใจได้ถูกต้อง และแสดงข้อสรุปก่อนข้างสมเหตุสมผล แต่นักเรียนไม่ได้สรุปขอบเขตของคำตอบ คือนักเรียนสรุปเพียงว่า “จะได้ว่าค่าทั่วไปของ θ ที่สอดคล้องกับสมการ $\tan\theta \sin\theta + \tan\theta = 0$ คือ $2n\pi + 0, 2n\pi + \pi, 2n\pi + 2\pi$ แสดงว่าข้อความข้างต้นไม่เป็นจริง” แต่เนื่องจากข้อสรุปของคำตอบที่ถูกต้องควรอธิบายว่า “จะได้ว่าค่าทั่วไปของ θ ที่สอดคล้องกับสมการ $\tan\theta \sin\theta + \tan\theta = 0$ คือ 0 และ $n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม แสดงว่าข้อความข้างต้นไม่เป็นจริง” แสดงดังภาพที่ 4-15

วิธีทำ

$\sin \theta + \cos \theta + \tan \theta = 0$

$\tan \theta (\sin \theta + 1) = 0$

$\tan \theta = 0$	$\sin \theta = -1$	
$\theta = 0^\circ, 360^\circ, 180^\circ$	$\theta = 270^\circ$	
$\theta = 0, 2\pi, \pi$	$\theta = \frac{3\pi}{2}$	

$\therefore \theta = 0, 2\pi, \pi$

จะได้คำตอบที่สอดคล้องกับสมการคือ $\pi, 2\pi - \theta, 2\pi + \pi, 2\pi + 2\pi$

แสดงว่า ข้อ ความที่วงกลมโอบเป็นจริง

ภาพที่ 4-15 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 4 ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

นักเรียนในกลุ่มที่ 5 ได้คะแนน 4 คะแนน คือ นักเรียนที่มีการอธิบายแสดงแนวคิดหรือมีการอ้างอิงเหตุผลประกอบการตัดสินใจและแสดงข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล จัดเป็นนักเรียนที่มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก ตัวอย่างโจทย์ “ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC มีความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า a เท่ากับ 32 b เท่ากับ 24 และ $\hat{A} = 30^\circ$ จงหาว่าขนาดของมุม B มีกี่ค่าพร้อมทั้งอธิบายแสดงแนวคิด หรือให้เหตุผลประกอบ” พบว่า นักเรียนมีการเขียนอธิบายแสดงแนวคิดหรือมีการอ้างอิงเหตุผลประกอบการตัดสินใจและแสดงข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล แสดงดังภาพที่ 4-16

วิธีทำ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{32} = \frac{\sin B}{24}$$

$$\sin B = \frac{24 \sin 30^\circ}{32}$$

$$\sin B = \frac{24 \left(\frac{1}{2}\right)}{32}$$

$$\sin B = 0.375$$

ดังนั้น $\hat{B} \approx 22^\circ$

จะได้ $\hat{B} \approx 22^\circ$

หรือ $\hat{B} \approx 180^\circ - 22^\circ = 158^\circ$

เมื่อมุม $\hat{B} \approx 22^\circ$ ได้มุม $\hat{C} \approx 180^\circ - 22^\circ - 30^\circ \approx 128^\circ$

$\hat{B} \approx 158^\circ$ เมื่อรวมกับมุม \hat{A} จะได้ 158° ซึ่งตั้งกันไม่ได้

ดังนั้นมุม \hat{B} จะมี 1 ค่า คือ 22°

ภาพที่ 4-16 ลักษณะของคำตอบนักเรียนในกลุ่มที่ 5 ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

บทที่ 5

สรุปผลและอภิปรายผล

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนกับเกณฑ์ ที่ร้อยละ 70 และ 2) เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนกับเกณฑ์ ที่ร้อยละ 70

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนชลกันยานุกูล อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี โดยกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนชลกันยานุกูล อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี จำนวน 1 ห้องเรียนรวม 50 คน ได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster random sampling)

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยได้แก่ 1) แผนการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ จำนวน 6 แผน 2) แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นแบบอัตนัย จำนวน 6 ข้อ มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.49-0.74 มีค่าอำนาจจำแนกที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ตั้งแต่ 0.33-0.73 และมีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.86 และ 3) แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นแบบอัตนัย จำนวน 6 ข้อ มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.43-0.71 มีค่าอำนาจจำแนกที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ตั้งแต่ 0.23-0.75 และมีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.76 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (\bar{X}) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) และการทดสอบที (t-test) แบบ one sample

สรุปผลการวิจัย

ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้

1. นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สูงกว่าเกณฑ์ที่ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สูงกว่าเกณฑ์ที่ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อภิปรายผล

ผู้วิจัยได้นำผลการวิจัยมาอภิปรายผล ตามลำดับดังนี้

1. ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จากผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน สูงกว่าเกณฑ์ที่ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานข้อที่ 1 ที่กำหนดไว้ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เป็นการจัดการเรียนรู้ที่เน้นพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการฝึกให้นักเรียนรู้จักค้นคว้าหาความรู้ด้วยตนเอง โดยนักเรียนจะได้พบกับปัญหาที่ท้าทายความคิดได้สังเกตและวิเคราะห์ปัญหาและใช้กระบวนการคิด คิดหาเหตุผล เพื่อค้นหาวิธีการ แนวคิด หรือแนวทางแก้ปัญหาที่ถูกต้องและเหมาะสมกับปัญหาเหล่านั้น ซึ่งผู้สอนมีบทบาทคอย ส่งเสริม แนะนำให้คำปรึกษา และใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนได้ค้นพบวิธีการแก้ปัญหาและคำตอบของปัญหา หรือสถานการณ์นั้น ๆ ด้วยตนเอง ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของวิมา ประชากุล และประสาธเนืองเฉลิม (2553, หน้า 228) ที่กล่าวว่า การเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เป็นกระบวนการเรียนรู้ที่สามารถพัฒนานักเรียนให้พัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการฝึกให้นักเรียนรู้จักค้นคว้าหาความรู้ โดยผู้สอนมีบทบาทในการตั้งคำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้ใช้กระบวนการทางความคิด หาเหตุผลจนค้นพบความรู้หรือแนวทางในการแก้ปัญหาที่ถูกต้องด้วยตนเอง แล้วสรุปออกมาเป็นหลักการ หรือวิธีการในการแก้ปัญหาและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ประโยชน์ได้ และสอดคล้องกับ สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ (2545, หน้า 136) ที่ได้กล่าวไว้ว่า การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เป็นกระบวนการเรียนรู้ที่เน้นการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการฝึกให้นักเรียนรู้จักศึกษาหาความรู้ โดยผู้สอนตั้งคำถามกระตุ้นให้นักเรียนใช้กระบวนการทางความคิดหาเหตุผลจนค้นพบความรู้ หรือแนวทางการแก้ปัญหาที่ถูกต้องด้วยตนเอง สรุปเป็นหลักการกฎเกณฑ์ หรือวิธีการในการแก้ปัญหา สามารถนำไปประยุกต์ใช้ประโยชน์ในการควบคุม ปรับปรุง เปลี่ยนแปลง หรือสร้างสรรค์สิ่งแวดล้อมในสภาพการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างกว้างขวาง นอกจากนี้ไสว พิกขาว (2544, หน้า 102-103) ได้กล่าวว่า การสอนแบบสืบสวนสอบสวนทำให้นักเรียนได้ฝึกการแก้ปัญหาและค้นหาข้อสรุปความรู้ด้วยตนเอง

เมื่อพิจารณาขั้นของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวน สอบสวน ที่ผู้วิจัยสังเคราะห์ขึ้น ซึ่งมีกระบวนการในการจัดการเรียนรู้ 5 ขั้น ได้แก่ 1) ขั้นเตรียมความพร้อม 2) ขั้นการสังเกต 3) ขั้นการอธิบายและปฏิบัติกิจกรรม 4) ขั้นสรุป และ 5) ขั้นการประยุกต์ใช้ พบว่า ขั้นที่ 2 ขั้นการสังเกต เป็นขั้นที่ผู้สอนนำเสนอปัญหาที่ท้าทายความคิดของนักเรียนและให้นักเรียนสังเกตสถานการณ์หรือโจทย์ที่เป็นปัญหานั้น และวิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหา ซึ่งในขั้นนี้นักเรียนจะได้ฝึกการคิดและวิเคราะห์หว่าข้อมูลใดบ้างที่โจทย์กำหนดให้ ข้อมูลที่โจทย์ต้องการคืออะไร และข้อมูลที่เป็นความรู้เดิมที่นักเรียนมีอยู่นำมาวิเคราะห์รวมกัน เพื่อพิจารณาหาแนวทางในการแก้ปัญหาตามที่โจทย์กำหนด ซึ่งขั้นตอนดังกล่าวก็จะสอดคล้องกับขั้นตอนของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ ขั้นการทำความเข้าใจปัญหานั้นเอง สำหรับขั้นที่ 3 ขั้นการอธิบายและปฏิบัติกิจกรรม เป็นขั้นที่ผู้สอนให้นักเรียนรวบรวมข้อมูลจากการวิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหาเพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งในขั้นนี้ผู้สอนจะคอยกระตุ้นให้นักเรียนค้นหาคำตอบ โดยอาศัยความสามารถในการให้เหตุผลมาอธิบายแนวคิดหรือวิธีการได้มาซึ่งคำตอบของปัญหา โดยในขั้นนี้เชื่อมโยงกับขั้นตอนของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในขั้นวางแผนการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นขั้นที่นักเรียนจะหาความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ทั้งที่เป็นสิ่งที่กำหนดให้ และข้อมูลที่เป็นผลตามมาจากสิ่งที่กำหนดให้ และให้นักเรียนได้เลือกวิธีการแก้ปัญหาที่เหมาะสมกับข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ และตามด้วยขั้นดำเนินการตามแผน ซึ่งเป็นขั้นที่นักเรียนจะนำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ให้เหมาะสมและแสดงการแก้ปัญหาเป็นลำดับขั้นตอนที่ถูกต้อง และในขั้นที่ 4 ขั้นสรุป เป็นขั้นที่นักเรียนจะสรุปเกี่ยวกับคำตอบ หรือข้อสรุปของสถานการณ์หรือโจทย์ปัญหา โดยในขั้นนี้ จะสอดคล้องกับขั้นตอนของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในขั้น การสรุปคำตอบ ซึ่งเป็นขั้นสรุปคำตอบว่าผลที่ได้เป็นไปตามที่ต้องการครบถ้วนหรือไม่ และในขั้นที่ 5 ขั้นการประยุกต์ใช้ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนได้นำหลักการ กฎเกณฑ์ และวิธีการแก้ปัญหาไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์อื่น ๆ ต่อไป

อย่างไรก็ตาม ในช่วงแรกของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวน สอบสวน ผู้วิจัยพบว่า นักเรียนยังไม่คุ้นชินกับการแก้ปัญหาที่เป็นลำดับขั้นตอน อาจเนื่องมาจากการเรียนการสอนที่ผ่านมา นักเรียนไม่ได้ถูกฝึกให้แก้ปัญหาแบบเป็นลำดับขั้นตอน นักเรียนมักแก้โจทย์ปัญหา โดยนำเอาสูตร และบทนิยามที่ท่องจำไว้มาใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งลักษณะของโจทย์ปัญหาเป็นการฝึกใช้สูตรมากกว่าการฝึกกระบวนการคิดและแก้ปัญหา ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เมื่อครูให้นักเรียนดำเนินการตามขั้นตอนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน คือ 1) ขั้นทำความเข้าใจปัญหา 2) ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา 3) ขั้นดำเนินการตามแผน และ 4) ขั้นการสรุปคำตอบ พบว่า ในขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เมื่อนักเรียนอ่านโจทย์ปัญหา

นักเรียนส่วนใหญ่สามารถตอบได้ว่าโจทย์ตามอะไรและกำหนดอะไรมาให้ ส่วนขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา นักเรียนบางส่วนยังไม่สามารถวางแผนการแก้ปัญหาได้ หรือไม่สามารถหาความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ทั้งที่เป็นสิ่งที่กำหนดให้และข้อมูลที่เป็นผลตามมาจากสิ่งที่กำหนดให้หรืออาจจะไม่มีความมั่นใจในความสัมพันธ์ของข้อมูลที่ตนสร้างขึ้นว่า มีความถูกต้องหรือไม่ ซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาได้ไม่ถูกต้องในขั้นที่ 3 ซึ่งคือ ขั้นตอนการตามแผน และทำให้นักเรียนสรุปคำตอบในขั้นที่ 4 ขั้นการสรุปคำตอบ ได้ไม่ถูกต้อง แต่ต่อมา ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 นักเรียนเริ่มมีความเข้าใจในการดำเนินการตามขั้นตอนการแก้ปัญหามากขึ้น และเมื่อนักเรียนผ่านกระบวนการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน จนถึงแผนการจัดการเรียนรู้สุดท้ายแล้ว พบว่า นักเรียนสามารถดำเนินการตามขั้นตอนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนได้ดี นักเรียนมีความเข้าใจในขั้นตอนการแก้ปัญหาทั้ง 4 ขั้นตอน มีการคิดอย่างเป็นระบบ สามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ และนักเรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหาไปใช้ในการหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้ดี

จากขั้นตอนที่กล่าวมาข้างต้น พบว่าเป็นขั้นตอนที่ส่งเสริมให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีระบบและมีระเบียบขั้นตอนในการคิด จึงทำให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของ Chiappetta and Russell (Chiappetta, Russell, 1982, pp. 85-93) ที่กล่าวว่า การสอนแก้ปัญหาคด้วยกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นลำดับขั้นตอน จะทำให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ และนักเรียนยังตระหนักถึงกระบวนการแก้ปัญหามากกว่าที่จะสนใจผลลัพธ์ของปัญหา และยังสอดคล้องกับคำกล่าวของ อัมพร ม้าคอง (2553, หน้า 39) ที่กล่าวว่า ผู้ที่มีทักษะการแก้ปัญหาก็มักมีความรู้ ประสบการณ์ ระบบการคิด และการตัดสินใจที่ดีพอ นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับงานวิจัยของ วรณวิสา จันทรสุนทรพร (2557, หน้า 123) ที่ได้พัฒนากิจกรรมการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการสืบเสาะหาความรู้เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาวทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความคล้าย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาวทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน หลังการจัดกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการสืบเสาะหาความรู้สูงกว่าก่อนจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และสูงกว่าเกณฑ์ที่ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2. ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จากผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานข้อที่ 2 ที่กำหนดไว้ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เป็นการจัดการเรียนรู้ที่ทำให้นักเรียนได้สร้างความรู้ ได้ฝึกการวิเคราะห์ปัญหาและแนวทางในการแก้ปัญหาอย่างรอบคอบและใช้กระบวนการทางความคิด คิดหาเหตุผลจนค้นพบข้อความรู้หรือแนวทางการแก้ปัญหาด้วยตนเอง ตลอดจนสามารถยืนยันและตัดสินใจอย่างถูกต้อง และสมเหตุสมผล ด้วยเหตุนี้จึงทำให้นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาอย่างลึกซึ้งด้วยความเข้าใจของตนเอง ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ วัชรรา เล่าเรียนดี (2554, หน้า 102) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนทำให้นักเรียนได้สร้างความรู้ด้วยตนเอง เป็นการเน้นทักษะการคิดระดับสูง (คิดวิเคราะห์ สังเคราะห์ และประเมินผล) และคำตอบที่ได้จากการเรียนรู้และสรุปด้วยตัวนักเรียนเองจะจำได้นานและจำด้วยความเข้าใจ นอกจากนี้ สุพิน บุญชูวงศ์ (2538, หน้า 61) ได้กล่าวว่า การสอนแบบสืบสวนสอบสวนได้ฝึกให้นักเรียนคิดอย่างมีเหตุผล และไสว พิกขาว (2544, หน้า 102-103) ได้กล่าวว่า การสอนแบบสืบสวนสอบสวน ทำให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการคิดและคิดอย่างมีเหตุผล อีกทั้ง Malloy (1999 อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2547, หน้า 98-99) ได้ร่วมเสนอแนวทางการพัฒนาการให้เหตุผลในระดับมัธยมศึกษา โดยให้ผู้สอนใช้แนวทางการสืบสอบในการส่งเสริมให้นักเรียนใช้เหตุผลในการตรวจสอบและอภิปรายเกี่ยวกับบริบทของปัญหา และเชื่อมโยงกับเนื้อหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์อื่นที่เกี่ยวข้อง นอกจากนี้เมื่อพิจารณาขั้นของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ที่ผู้วิจัยสังเคราะห์ขึ้น พบว่าขั้นที่ 3 ขั้นการอธิบายและปฏิบัติกิจกรรม ซึ่งเป็นขั้นที่ผู้สอนให้นักเรียนรวบรวมข้อมูลจากการวิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหาเพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งในขั้นนี้ผู้สอนจะคอยกระตุ้นให้นักเรียนค้นหาคำตอบ โดยอาศัยความสามารถในการให้เหตุผลมาอธิบายแนวคิด หรือวิธีการได้มาซึ่งคำตอบของปัญหา จึงเห็นได้ชัดว่าในขั้นนี้เป็นขั้นที่นักเรียนจะได้ฝึกคิดหาเหตุผลมาอธิบายและแสดงแนวคิด อ้างอิงเหตุผลประกอบ ซึ่งในช่วงแรกของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ผู้วิจัยพบว่า นักเรียนมีความสนใจเรียนแต่ยังไม่กล้าที่จะแสดงความคิดเห็น อาจเพราะกลัวว่าเหตุผลที่นำมาอธิบายแนวคิดนั้นเป็นเหตุผลที่ผิด หรือนักเรียนไม่กล้าตอบคำถาม ที่ต้องใช้การอธิบายประกอบคำตอบได้มากนัก บางครั้งครูผู้สอนก็เฉลยคำตอบพร้อมอธิบายเหตุผลเป็นตัวอย่างให้นักเรียนก่อนในตอนแรก เพื่อให้นักเรียนมั่นใจในเหตุผลของตนเองและกล้าที่จะอธิบายเหตุผลมากขึ้นในครั้งต่อ ๆ ไป และในขั้นที่ 4 ขั้นสรุป ในขั้นนี้นักเรียน

จะได้สรุปเกี่ยวกับคำตอบหรือข้อสรุปของสถานการณ์หรือโจทย์ปัญหา โดยผู้สอนสามารถให้นักเรียนแสดงเหตุผลได้ว่า คำตอบที่นักเรียนสรุปนั้นมีความสมเหตุสมผลหรือไม่เพราะเหตุใด สืบเนื่องจากขั้นที่ 3 ช่วงแรกของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เมื่อไม่นักเรียนไม่กล้าที่จะแสดงความคิดเห็น จึงส่งผลต่อขั้นที่ 4 ขั้นสรุปนี้ นักเรียนจึงไม่สามารถอธิบายได้ว่าคำตอบที่ตนเองสรุปนั้นสมเหตุสมผลอย่างไร ขั้นที่ 5 ขั้นการประยุกต์ใช้ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนจะได้นำหลักการ กฎเกณฑ์ และวิธีการแก้ปัญหาไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์อื่น ๆ โดยนักเรียนสามารถให้เหตุผลในการเลือกใช้วิธีการให้เหมาะสมกับสถานการณ์นั้น ๆ ได้ ในช่วงแรกนักเรียนบางส่วนสามารถเลือกใช้วิธีการให้เหมาะสมกับสถานการณ์อื่นได้ แต่ยังไม่สามารถอธิบายเหตุผลได้ว่าเหตุใดถึงเลือกใช้วิธีการนั้น ซึ่งจากที่กล่าวมา ในช่วงแรกที่พบว่านักเรียนไม่สามารถอธิบายเหตุผลได้นั้น อาจเป็นเพราะการเรียนการสอนที่ผ่านมา นักเรียนไม่ได้ถูกฝึกให้แสดงเหตุผล นักเรียนจึงยังไม่คุ้นเคยกับการแสดงแนวคิดหรืออธิบายเหตุผลของตนเองได้ แต่เมื่อนักเรียนผ่านกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน จนถึงแผนการจัดการเรียนรู้สุดท้ายแล้ว พบว่า นักเรียนมีความกล้าและสามารถอธิบาย แสดงแนวคิดเหตุผลของตนเอง รวมทั้งการอ้างอิงเหตุผลประกอบ และแสดงข้อสรุปของคำตอบของตนเองได้อย่างสมเหตุสมผล

จากข้อความข้างต้น จึงอาจกล่าวได้ว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน นั้นส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ โสภรศมภ์ ดาหลาย (2551, หน้า 144) ที่พบว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการพัฒนามโนทัศน์โดยใช้กระบวนการสืบสวนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปกติ ที่ระดับนัยสำคัญ .05

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะในการนำไปใช้

1.1 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ครูควรจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ซึ่งเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ มีระเบียบขั้นตอน ซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนเกิดการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น

1.2 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ครูควรจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ซึ่งเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนได้เกิดกระบวนการคิด การสังเกต การคิดวิเคราะห์และไตร่ตรองอย่างมีเหตุผล ซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนเกิดการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น

1.3 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ค่อนข้างใช้เวลามาก ครูควรมีการวางแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้อย่างรัดกุมและครูควรฝึกให้นักเรียน เรียนรู้การแก้ปัญหาด้วยตัวเองหรือปรึกษากันภายในกลุ่ม เพื่อหาข้อสรุปร่วมกัน โดยครูเป็นเพียงผู้คอยให้คำแนะนำช่วยเหลือมากกว่าจะเป็นผู้บอกความรู้ให้แก่ผู้เรียน อีกทั้ง ครูควรใช้คำถามนำอย่างต่อเนื่องเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนคิด อธิบายและแสดงผลประกอบแนวคิดและการแก้ปัญหาของตนเอง นอกจากนี้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นให้นักเรียนสร้างองค์ความรู้และข้อสรุปด้วยตนเอง หากนักเรียนบางคนขาดทักษะพื้นฐานในด้านการคิด อาจได้ข้อสรุปที่ไม่ถูกต้องได้ ดังนั้นครูจึงควรตรวจสอบข้อสรุปของนักเรียนอยู่เสมอ

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

2.1 ควรนำรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนมาประยุกต์ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อส่งผลให้นักเรียนมีการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านอื่น ๆ นอกเหนือจากการแก้ปัญหามและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เช่น เพื่อส่งเสริมและพัฒนาทักษะการสื่อสาร หรือการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เป็นต้น

2.2 ควรมีการศึกษาค้นคว้าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนในเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่น ๆ เช่น เวกเตอร์ ความน่าจะเป็น ทฤษฎีกราฟ เป็นต้น

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. (2552 ก). *หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*.
กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2552 ข). *เอกสารประกอบหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 แนวปฏิบัติการวัดและประเมินผลการเรียนรู้*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2556). *การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ (พิมพ์ครั้งที่2)*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค.ลาดพร้าว.
- กาญจนา ต. ไชยสุวรรณ. (2557, 10 มีนาคม). *ครูชำนาญการพิเศษ. สัมภาษณ์*.
- กิตติ พัฒนาตระกูล. (2546). การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาของประเทศไทย
ล้มเหลวจริงหรือ. *วารสารคณิตศาสตร์*, 46(530-532), 54-58.
- กิตติยา เย็นไธสง. (2557, 10 มีนาคม). *ครูชำนาญการ. สัมภาษณ์*.
- กรมวิชาการ. (2544). *คู่มือการจัดสาระและมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์*.
กรุงเทพฯ: องค์การรับส่งสินค้าและครุภัณฑ์.
- กรมวิชาการ. (2546 ก). *การจัดสาระการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-6 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544*.
กรุงเทพฯ: กระทรวงศึกษาธิการ.
- กรมวิชาการ. (2546 ข). *การจัดสาระการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1-6 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544*. กรุงเทพฯ:
กระทรวงศึกษาธิการ.
- เฉลิมลาภ ทองอาจ. (2554). รูปแบบการสอนฝึกหัดสืบสอบ: เรียนรู้ภาษาไทยจากการค้นพบ.
วารสารศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 9(1), 7-9.
- ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี. (2542). *การสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: ภาควิชาหลักสูตรและการสอน
คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- เชษฐา ซาบา. (2544). *รูบริค : อีกคำตอบสำหรับการวัดและประเมินผลเพื่อพัฒนาการเรียนรู้ตาม
สภาพที่แท้จริง*. *วารสารวิชาการ*, 4(2), 42-45.
- ไชยยศ ไพวิทยศิริธรรม. (2555). *เอกสารประกอบการสอน: สถิติเพื่อการวิจัยทางการศึกษา
(Statistics for Educational Research)*. นครปฐม: มหาวิทยาลัยศิลปากร.

- ณัฐกฤตา ปัตตาลโป. (2553). ผลการใช้ชุดการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ เรื่อง การประยุกต์อัตราส่วนและร้อยละ ที่มีต่อทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. ปรินญาการศึกษามหาบัณฑิต, สาขาวิชาการมัธยมศึกษา, คณะศึกษาศาสตร์, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ไทยรัฐออนไลน์. (2557). วิเคราะห์ “คะแนน โอเน็ต” เหตุไฉนยังย่ำแย่. เข้าถึงได้จาก <http://www.thairath.co.th/content/413042>
- บรรพต สุวรรณประเสริฐ. (2544). การพัฒนาหลักสูตร โดยเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ (พิมพ์ครั้งที่ 2). เชียงใหม่: The Knowledge Center.
- บุญนำ เกษี. (2557, 10 มีนาคม). ครูชำนาญการพิเศษ. สัมภาษณ์.
- ปรีชา เนาว์เย็นผล. (2537). การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์. วารสารคณิตศาสตร์, 38(434–435), 62–64.
- พรรณทิพา พรหมรักษ์. (2552). การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน โดยใช้กระบวนการวางนัยทั่วไปเพื่อส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางพีชคณิตและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปรินญาครุศาสตรดุษฎีบัณฑิต, สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน, คณะครุศาสตร์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- พิชิต ฤทธิงู. (2548). หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: เอเชีย ออฟ เคอร์รี่ส์.
- พิมพ์พันธ์ เดชะคุปต์. (2544). การเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ: แนวคิด วิธีและเทคนิคการสอน 1. กรุงเทพฯ: เดอะมาสเตอร์กรุ๊ป แมเนจเม้นท์.
- มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช. (2537). ประมวลสาระชุดวิชาสารัตถะและวิทยวิธีทางวิชาคณิตศาสตร์ หน่วยที่ 8-11. กรุงเทพฯ: บัณฑิตศึกษา สาขาวิชาศึกษาศาสตร์.
- มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช. (2549). เอกสารการสอนชุดวิชา การสอนคณิตศาสตร์ 22451 Teaching Mathematics หน่วยที่ 8-15. นนทบุรี: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2533). การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: บพิธการพิมพ์.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2541). การสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2542). การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์. วารสารคณิตศาสตร์, 42(485–487), 5–11.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2545). การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยุคปฏิรูปการศึกษา. กรุงเทพฯ: บพิธการพิมพ์.
- โรงเรียนชลกันยานุกูล. (2556). ผลการสอบ O-NET ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. เข้าถึงได้จาก <http://www.chonkanya.ac.th/>

- โรงเรียนชลกันยานุกูล กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. (2556). คำอธิบายรายวิชาและโครงสร้างรายวิชา รหัสวิชา ค 32201 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. ม.ป.ท.
- วัชร น้อยมี. (2551). ผลการศึกษาการพัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลของผู้เรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. ปรินญาการศึกษามหาบัณฑิต, สาขาวิชาการมัธยมศึกษา, คณะศึกษาศาสตร์, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- วัชร เล่าเรียนดี. (2554). รูปแบบและกลยุทธ์การจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการคิด (พิมพ์ครั้งที่ 7 ฉบับปรับปรุง). กรุงเทพฯ : คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์.
- วัฒนาพร ระงับทุกข์. (2542). แผนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง (พิมพ์ครั้งที่ 2). ม.ป.ท.
- วรรณวิสา จันทร์สุนทรภาพร. (2557). การพัฒนากิจกรรมการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการสืบเสาะหาความรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความคล้าย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปรินญาการศึกษา มหาบัณฑิต, สาขาวิชาการมัธยมศึกษา, คณะศึกษาศาสตร์, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- วิชิต สุรัตน์เรืองชัย. (2540). เอกสารประกอบการสอนวิชา 404361 : วิธีสอนทั่วไป = *General method of teaching*. ชลบุรี: ภาควิชาหลักสูตรและการสอน มหาวิทยาลัยบูรพา.
- วีณา ประชากุล และประสาท เนืองเฉลิม. (2553). รูปแบบการเรียนการสอน. มหาสารคาม: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.
- วีรยุทธ วิเชียรโชติ. (2521). จิตวิทยาการเรียนการสอนแบบสืบสวนสอบสวน. ม.ป.ท.
- เวชฤทธิ์ อังคนะภักขจร. (2555). ครบเครื่องเรื่องความรู้สำหรับครูคณิตศาสตร์: หลักสูตร การสอนและการวิจัย. กรุงเทพฯ: จรัญสนิทวงศ์การพิมพ์.
- ศศิธร แม้นสงวน. (2555). พฤติกรรมการสอนคณิตศาสตร์ 2 *Teaching Behavior in Mathematics 2*. กรุงเทพฯ. สำนักพิมพ์ของมหาวิทยาลัยรามคำแหง.
- สถาบันทดสอบการศึกษาแห่งชาติ องค์กรมหาชน. (2556). สรุปผลวิเคราะห์ความสามารถของนักเรียน ป.6, ม.3, ม.6 จากคะแนน O-NET. เข้าถึงได้จาก <http://www.niets.or.th/>
- สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ องค์กรมหาชน. (2557). ค่าสถิติพื้นฐานของคะแนนการสอบ GAT/PAT ครั้งที่ 1/2556. เข้าถึงได้จาก <http://www.niets.or.th/>
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2546). คู่มือวัดประเมินผลคณิตศาสตร์. ม.ป.ท.

- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2547). *การให้เหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544*. กรุงเทพฯ: เอส.พี.เอ็น. การพิมพ์.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555 ก). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (พิมพ์ครั้งที่ 3)*. กรุงเทพฯ: 3-คิว มีเดีย.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555 ข). *การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดยูเคชั่น.
- สมชาย ชูชาติ. (2538). *เอกสารคำสอนวิชา ศษ 361 วิธีสอนทั่วไป*. กรุงเทพฯ: ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สมเดช บุญประจักษ์. (2540). *การพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ*. วิทยานิพนธ์ปริญญาคุยฎบัณฑิต, สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา, คณะศึกษาศาสตร์, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สมวงษ์ แปลงประสพโชค. (2544). *การให้เหตุผล (พิมพ์ครั้งที่ 4)*. กรุงเทพฯ: Learn and Play MATHGROUP.
- สมวงษ์ แปลงประสพโชค และคณะ. (2545). *กิจกรรมส่งเสริมการคิดและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ (พิมพ์ครั้งที่ 4)*. กรุงเทพฯ : Learn and Play MATHGROUP.
- สมศักดิ์ ไสภณพินิจ. (2547). *ยุทธวิธีการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ (กับการสอน)*. วารสารคณิตศาสตร์ ฉบับเฉลิมพระเกียรติ 72 พรรษา, 14-25.
- สิริพร ทิพย์คง. (2537). *แนวโน้มการสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- สิริพร ทิพย์คง. (2545). *หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: พัฒนาคุณภาพวิชาการ(พว).
- สุพิน บุญชูวงศ์. (2538). *หลักการสอน (พิมพ์ครั้งที่ 8 ปรับปรุงเนื้อหา)*. กรุงเทพฯ: ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะศึกษาศาสตร์ วิทยาลัยครูสวนดุสิต.
- สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ. (2545). *20 วิธีจัดการเรียนรู้ เพื่อพัฒนาคุณธรรมจริยธรรมค่านิยม และการเรียนรู้โดยการแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ภาพพิมพ์.
- โสภณศรี ดาหลาย. (2551). *ผลของการพัฒนามโนทัศน์โดยใช้กระบวนการสืบสอบที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1*. ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต, สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์, คณะครุศาสตร์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ไสว พักขาว. (2544). *หลักการสอนสำหรับการเป็นครูมืออาชีพ*. กรุงเทพฯ: เอมพันธ์.

- อัมพร ม้าคนอง. (2546). *คณิตศาสตร์ : การสอนและการเรียนรู้*. กรุงเทพฯ: ศูนย์ตำราและเอกสารวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อัมพร ม้าคนอง. (2547). *การพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์*. ใน พร้อมพรรณ อุดมสิน และอัมพร ม้าคนอง (บรรณาธิการ), *ประมวลบทความหลักการและการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์* (หน้า 94-101). กรุงเทพฯ: บพิธการพิมพ์.
- อัมพร ม้าคนอง. (2548). *เอกสารประกอบการสอน 2704687 การพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์* (อัคราเนนา). ม.ป.ท.
- อัมพร ม้าคนอง. (2553). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ* (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: ศูนย์ตำราและเอกสารวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- องอาจ นัยพัฒน์. (2551). *วิธีวิทยาการวิจัยเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพทางพฤติกรรมศาสตร์และสังคมศาสตร์* (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: สามลดา.
- Artzt, A., & Shirel, Y. (1999). *Mathematics reasoning during small-group problem solving. In developing mathematical reasoning in grades K-12*. Stiff, Lee V. pp. 115-126. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. (1999 Yearbook).
- Baroody, A. J. (1993). *Problem solving, reasoning, and communication, K-8: Helping children think mathematically*. New York: Macmillan.
- Bell, F. H. (1978). *Teaching and learning mathematics (in Secondary school)* (2nd ed.). Wm.C: Brown Company Publishers.
- Bruner, J. S. (1966). *The process of education*. Cambridge: Harvard University Press.
- Callahan, J. F., et al. (1998). *Teaching in the middle and secondary school* (6th ed.). Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall.
- Carin, A. (1993). *Teaching science through discovery* (7th ed.). New York: Macmillan.
- Chiappetta, E. L., & Russell, J. M. (1982). The relationship among logical thinking, problem Solving instruction, and knowledge and application of earth science subject matter. *Science Education*, 66(1), 85-93.
- Collins, O. W. (1990 March). The impact of computer-Assisted instruction upon student achievement in magnet school, *Dissertation Abstracts International*. 50, 2783-A.
- Good, C. V. (1973). *Dictionary of education* (3th ed.). New York: McGraw-Hill.

- Kennedy, L. M., & Tipps, S. (1994). *Guiding children's learning of mathematics* (7th ed.). Belmont, California: Woodworth Publishing.
- Krulik, S., & Reys, R. E. (1980). *Problem solving in mathematics*. Reston, Virginia: The National Council of teachers of Mathematics.
- Krulik, S. and Rudnick, J. A. (1993). *Reasoning and Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teachers*. Massachusetts: Allyn and Bacon.
- Leblance, J. F. (1977). You Can Teach Problem Solving. *Arithmetic Teacher* 25 November, 17-25
- Mason, R. T. (1997). Learning algebra personally (Ninth-Grade), small group inquiry. *Dissertation Abstracts International*, 58-09A.
- O'Daffer, P. G. (1990 May). Inductive and deductive reasoning. *The Mathematics Teacher*. 93(6), 379-380.
- Polya, G. (1980). *On solving mathematical problems in high school*. Problem Solving in School Mathematics. Yearbook. Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics.
- Russell, S. J. (1999). *Mathematic reasoning in the elementary grades*. In *developing mathematical reasoning in K-12*. Shiff, Lee V. pp. 1-12. Reston Virginia: The National Council of teachers of Mathematics.
- Stiggins, R. (1997). *Student-centered classroom assessment* (2nd ed.). New Jersey: Prentice-Hall.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

- รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ
- สำเนาหนังสือขอความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัย
- สำเนาหนังสือขอความอนุเคราะห์ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อหาคุณภาพของเครื่องมือการวิจัย
- สำเนาหนังสือขอความอนุเคราะห์ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อการวิจัย

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ

- | | |
|-------------------------------|--|
| 1. อาจารย์ ดร.สุณิสา สุมิตรณะ | ตำแหน่ง อาจารย์ประจำสาขาวิชาการมัธยมศึกษา
คณะศึกษาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ |
| 2. อาจารย์ ดร.สมคิด อินเทพ | ตำแหน่ง อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยบูรพา |
| 3. อาจารย์วิมล วังกรานต์ | ตำแหน่ง ครูชำนาญการพิเศษ
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
โรงเรียนสระกระโจม โสภณพิทยา
จังหวัดสุพรรณบุรี |
| 4. อาจารย์กาญจนา ต.ไชยสุวรรณ | ตำแหน่ง ครูชำนาญการพิเศษ
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
โรงเรียนชลกันยานุกูล จังหวัดชลบุรี |
| 5. อาจารย์กิตติยา เป็นไธสง | ตำแหน่ง ครูชำนาญการ
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
โรงเรียนชลกันยานุกูล จังหวัดชลบุรี |



ที่ ศษ ๖๖๒๑/ ๑. ๑๒๒๕

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
๑๖๕ ถ.ลงหาดบางแสน ต.แสนสุข
อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๒๗ มิถุนายน ๒๕๕๗

เรื่อง ขอบความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัย

เรียน ดร.สุณิสา สุมิตรณะ

สิ่งที่ส่งมาด้วย เค้าโครงข้อวิทยานิพนธ์ และเครื่องมือเพื่อการวิจัย จำนวน ๑ ชุด

ด้วยนางสาวชมพูนุช รุ่งสว่าง นิสิตระดับบัณฑิตศึกษา หลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ได้รับอนุมัติให้ทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง “ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหา และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องการประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕” โดยอยู่ในความควบคุมดูแลของ ดร.พรหมทิพา พรหมรักษ์ ประธานกรรมการ ขณะนี้อยู่ในขั้นตอนการสร้างเครื่องมือเพื่อการวิจัย ในการนี้คณะศึกษาศาสตร์ ได้พิจารณาแล้วเห็นว่าท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญในเรื่องดังกล่าวเป็นอย่างดี จึงขอความอนุเคราะห์จากท่านในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัยของนิสิตในครั้งนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา หวังเป็นอย่างยิ่งว่าท่านจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิมลรัตน์ จตุรานนท์)

รองคณบดีฝ่ายวิชาการ ปฏิบัติการแทน

ผู้รักษาการแทนคณบดีคณะศึกษาศาสตร์

ผู้รักษาการแทนอธิการบดีมหาวิทยาลัยบูรพา

ภาควิชาการจัดการเรียนรู้

โทรศัพท์ ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๖, ๐-๓๘๑๐-๒๐๖๕

โทรสาร ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๕

ฟัซซ์ ๐๘๕-๒๕๔๐๒๓๒



บันทึกข้อความ

ส่วนงาน คณะศึกษาศาสตร์ ภาควิชาการจัดการเรียนรู้ โทร ๒๐๒๕, ๒๐๖๕
 ที่ ศธ ๖๖๒๑/ ๑๖๕๖ วันที่ ๒๗ มิถุนายน พ.ศ. ๒๕๕๗
 เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการทำวิจัย
 เรียน ดร.สมคิด อินเทพ

ด้วยนางสาวชมพูนุช รุ่งสว่าง นิสิตระดับบัณฑิตศึกษา หลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ได้รับอนุมัติให้ทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง “ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหา และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องการประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕” โดยอยู่ในความควบคุมดูแลของ ดร.พรณทิพา พรหมรักษ์ ประธานกรรมการ ขณะนี้อยู่ในขั้นตอนการสร้างเครื่องมือเพื่อการวิจัย ในกรณีนี้คณะศึกษาศาสตร์ ได้พิจารณาแล้วเห็นว่าท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญในเรื่องดังกล่าวเป็นอย่างดี จึงขอความอนุเคราะห์จากท่านในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัยของนิสิตในครั้งนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิมลรัตน์ จตุรานนท์)

รองคณบดีฝ่ายวิชาการ



ที่ ศร ๖๖๒๑/ว.๖๒๒๕

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
๑๖๕ ถ.ลงหาดบางแสน ต.แสนสุข
อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๒๗ มิถุนายน ๒๕๕๗

เรื่อง ขอบความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัย

เรียน นายวิมล วัชรานนท์

สิ่งที่ส่งมาด้วย ค่าโครงการวิทยานิพนธ์ และเครื่องมือเพื่อการวิจัย จำนวน ๑ ชุด

ด้วยนางสาวชมพูนุช รุ่งสว่าง นิสิตระดับบัณฑิตศึกษา หลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ได้รับอนุมัติให้ทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง “ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องการประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕” โดยอยู่ในความควบคุมดูแลของ ดร.พรรณทิพา พรหมรัักษ์ ประธานกรรมการ ขณะนี้อยู่ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือเพื่อการวิจัย ในการนี้คณะศึกษาศาสตร์ ได้พิจารณาแล้วเห็นว่าท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญในเรื่องดังกล่าวเป็นอย่างดี จึงขอความอนุเคราะห์จากท่านในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัยของนิสิตในครั้งนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา หวังเป็นอย่างยิ่งว่าท่านจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิมลรัตน์ จิตรานนท์)

รองคณบดีฝ่ายวิชาการ ปฏิบัติการแทน

ผู้รักษาการแทนคณบดีคณะศึกษาศาสตร์

ผู้รักษาการแทนอธิการบดีมหาวิทยาลัยบูรพา

ภาควิชาการจัดการเรียนรู้

โทรศัพท์ ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๖, ๐-๓๘๑๐-๒๐๖๕

โทรสาร ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๕

เว็บไซต์ ๐๘๕-๒๕๕๐๑๓๓๓



ที่ ศธ ๖๖๒๑๙.๑๕๕๔

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
๑๖๘ ถ.ลงหาดบางแสน ต.แสนสุข
อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๕๗ มิถุนายน ๒๕๕๗

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัย

เรียน นางกาญจนา ส.ไชยสุวรรณ

สิ่งที่ส่งมาด้วย คำโครงการวิทยานิพนธ์ และเครื่องมือเพื่อการวิจัย จำนวน ๑ ชุด

ด้วยนางสาวชมพูนุช รุ่งสว่าง นิสิตระดับบัณฑิตศึกษา หลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ได้รับอนุมัติให้ทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง “ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องการประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕” โดยอยู่ในความควบคุมดูแลของ ดร.พรรณทิพา พรหมรักษ์ ประธานกรรมการ ขณะนี้อยู่ในขั้นตอนการสร้างเครื่องมือเพื่อการวิจัย ในการนี้คณะศึกษาศาสตร์ ได้พิจารณาแล้วเห็นว่าท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญในเรื่องดังกล่าวเป็นอย่างดี จึงขอความอนุเคราะห์จากท่านในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัยของนิสิตในครั้งนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิมลรัตน์ จตุรานนท์)

รองคณบดีฝ่ายวิชาการ ปฏิบัติการแทน

ผู้รักษาการแทนคณบดีคณะศึกษาศาสตร์

ผู้รักษาการแทนอธิการบดีมหาวิทยาลัยบูรพา

ภาควิชาการจัดการเรียนรู้

โทรศัพท์ ๐-๓๘๓๖-๓๔๘๖, ๐-๓๘๑๐-๒๐๖๕

โทรสาร ๐-๓๘๓๖-๓๔๘๕

เว็บไซต์ ๐๘๕-๒๕๔๐๒๑๒



ที่ ศบ ๖๖๒๑/ว.๑๖๖๔

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร
๑๖๕ ถ.สิงหนครบางแสน ต.แสนสุข
อ.เมือง จ.สกลนคร ๒๐๑๓๑

๒๗ มิถุนายน ๒๕๕๖

เรื่อง ขอบความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัย

เรียน นางกิตติยา เข็นไรสง

สิ่งที่ส่งมาด้วย คำร้องขอวิทยานิพนธ์ และเครื่องมือเพื่อการวิจัย จำนวน ๑ ชุด

ด้วยนางสาวชมพูนุช รุ่งสว่าง นิสิตระดับบัณฑิตศึกษา หลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร ได้รับอนุมัติให้ทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง “ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องการประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕” โดยอยู่ในความควบคุมดูแลของ ดร.พรพนทิพา พรหมรัถย์ ประธานกรรมการ ขณะนี้อยู่ในขั้นตอนการสร้างเครื่องมือเพื่อการวิจัย ในการนี้คณะศึกษาศาสตร์ ได้พิจารณาแล้วเห็นว่าท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญในเรื่องดังกล่าวเป็นอย่างดี จึงขอความอนุเคราะห์จากท่านในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเครื่องมือเพื่อการวิจัยของนิสิตในครั้งนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงจะได้รับ ความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิมลรัตน์ จิตรานนท์)

รองคณบดีฝ่ายวิชาการ ปฏิบัติการแทน

ผู้รักษาการแทนคณบดีคณะศึกษาศาสตร์

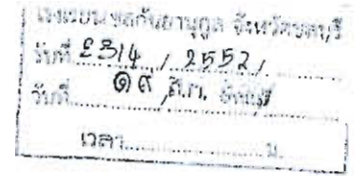
ผู้รักษาการแทนอธิการบดีมหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร

ภาควิชาการจัดการเรียนรู้

โทรศัพท์ ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๖, ๐-๓๘๑๐-๒๐๖๕

โทรสาร ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๕

ผู้วิจัย ๐๘๕-๒๕๔๐๒๓๒



ที่ ศธ ๖๖๒๑/ ๒๑๔๑

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
๑๖๘ ถ.ลงหาดบางแสน ต.แสนสุข
อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๓ สิงหาคม ๒๕๕๒

เรื่อง ขอบความอนุเคราะห์ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อหาคุณภาพของเครื่องมือการวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการ โรงเรียนชลกันยานุกูล

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือเพื่อการวิจัย จำนวน ๑ ชุด

ด้วยนางสาวชมพูช รุ่งสว่าง นิสิตระดับบัณฑิตศึกษา หลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ได้รับอนุมัติให้ทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง "ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้สืบสวนสอบสวนที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องการประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติของชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕" ในความควบคุมดูแลของ ดร.พรณิศา พรหมรักษ์ ประธานกรรมการ มีความประสงค์ขออำนวยความสะดวกในการเก็บรวบรวมข้อมูลจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕/๖ จำนวน ๔๘ คน โดยผู้วิจัยจะขออนุญาตเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยตนเอง ระหว่างวันที่ ๑๔ สิงหาคม พ.ศ. ๒๕๕๒ - ๑ กันยายน พ.ศ. ๒๕๕๒ อนึ่งโครงการวิจัยนี้ได้ผ่านขั้นตอนพิจารณาทางจริยธรรมการวิจัยของมหาวิทยาลัยบูรพาเรียบร้อยแล้ว

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

น	ผู้อำนวยการโรงเรียน
<input checked="" type="checkbox"/>	เมื่อไปขอทราบ
<input type="checkbox"/>	เป็นแบบฟอร์ม
<input checked="" type="checkbox"/>	ขอทราบถึง คุณสมบัติ
ขอความอนุเคราะห์ เก็บข้อมูล	
เพื่อขอทำวิจัย	
๑๙/๘/๕๕	

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิมลรัตน์ จตุรานนท์)
รองคณบดีฝ่ายวิชาการ ปฏิบัติการแทน
คณบดีคณะศึกษาศาสตร์ ปฏิบัติการแทน
ผู้อำนวยการแทนอธิการบดีมหาวิทยาลัยบูรพา

ภาควิชาการจัดการเรียนรู้

โทรศัพท์ ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๖, ๐-๓๘๑๐-๒๐๖๕

โทรสาร ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๕

Handwritten signatures and notes at the bottom right of the page, including the name 'วิมลรัตน์' and other illegible text.



โรงเรียนเทศบาลบ้านบุ่งกุศล จังหวัดชลบุรี
ที่ ๕/๖ / ๒๕๖๖
วันที่ ๒๐ ส.ค. ๒๕๖๕
หน้า น

ที่ ศธ ๖๖๒๑/ ๖ ๕๕

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
๑๖๕ ถ.ลงหาดบางแสน ต.แสนสุข
อ.เมือง จ.ชลบุรี ๒๐๑๓๑

๖๓ สิงหาคม ๒๕๕๖

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อการวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนชลกันยานุกูล

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือเพื่อการวิจัย จำนวน ๑ ชุด

ด้วยนางสาวชมพูนุช รุ่งสว่าง นิสิตระดับบัณฑิตศึกษา หลักสูตรการศึกษา
มหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ได้รับอนุมัติให้ทำวิทยานิพนธ์เรื่อง
"ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนที่มีต่อความสามารถ
ในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องการประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติของ
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕" อยู่ในความควบคุมดูแลของ ดร.พรรณทิพา พรหมรักษ์ ประธาน
กรรมการ มีควมประสงค์ขออำนวยความสะดวกในการเก็บรวบรวมข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่างคือ
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕/๗ จำนวน ๕๐ คน ขออนุญาตเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยตนเอง
ระหว่างวันที่ ๔ กันยายน พ.ศ. ๒๕๕๖ - ๒๕ กันยายน พ.ศ. ๒๕๕๖ หนึ่งโครงการวิจัยนี้ได้ผ่าน
ขั้นตอนการพิจารณาทางจริยธรรมการวิจัยของมหาวิทยาลัยบูรพา เรียบร้อยแล้ว

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา หวังเป็นอย่างยิ่ง
ว่าคงจะได้รับขานอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียน
<input checked="" type="checkbox"/> เพื่อไปตรวจ
<input type="checkbox"/> เพื่อไปพิจารณา
<input checked="" type="checkbox"/> ขอความเห็น/ความเห็น
คณะศึกษาศาสตร์ ม.บูรพา รว
นางสาวชมพูนุช รุ่งสว่าง
เพื่อขอวิจัย
ตรงลง <i>Dr. Lhm</i>
๒๐ ส.ค. ๒๕๕๖

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิมลรัตน์ จิตรานนท์)

รองคณบดีฝ่ายวิชาการ ปฏิบัติการแทน
คณบดีคณะศึกษาศาสตร์ ปฏิบัติการแทน
ผู้รักษาการแทนอธิการบดีมหาวิทยาลัยบูรพา

Dr. Lhm

ภาควิชาการจัดการเรียนรู้

โทรศัพท์ ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๖, ๐-๓๘๑๐-๒๐๖๕

โทรสาร ๐-๓๘๓๕-๓๔๘๕

Dr. Lhm
Dr. Lhm
mm

ภาคผนวก ข

- ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ที่พัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

- เฉลยใบกิจกรรมที่ 1.1, ใบกิจกรรมที่ 1.2 และแบบฝึกหัดที่ 1 ในแผนการจัดการเรียนรู้ ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

- แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

- เฉลยแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

- แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

- เฉลยแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ รหัสวิชา ค 32201 รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผู้สอน นางสาวชมพูนุท รุ่งสว่าง	เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวก และผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เวลา 2 คาบ ตำแหน่ง นิสิต ป.โท ฝึกสอน โรงเรียนชลกัลยานุกูล
---	--

ผลการเรียนรู้

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ไว้
2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ไปใช้แก้ปัญหาได้
3. ใช้วิธีหลากหลายในการแก้ปัญหา ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม มีการให้เหตุผล การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารสื่อความหมายและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง มีการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆทางคณิตศาสตร์ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการทำงาน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนักเรียนจบบทเรียนเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมแล้ว

ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมโดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมโดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมไปใช้แก้ปัญหาได้
2. นักเรียนสามารถแสดงแนวคิดหรืออ้างอิงเหตุผลเกี่ยวกับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้อย่างสมเหตุสมผล

สาระสำคัญ

เมื่อ A และ B เป็นจำนวนจริงหรือมุมใดๆ จะสามารถสรุปค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ได้ดังนี้

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

กิจกรรมการเรียนรู้

คาบที่ 1

ขั้นเตรียมความพร้อม

1. ครูและนักเรียนทบทวนความรู้เดิมเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยครูใช้คำถามนำ ดังนี้

- ถ้า $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ แล้ว $\sec \theta$, $\operatorname{cosec} \theta$, $\cot \theta$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

- ถ้า $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ แล้ว $\cos(90^\circ - \alpha)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

2. ครูและนักเรียนทบทวนความรู้เดิมเกี่ยวกับ มุมที่มีหน่วยเป็นองศา และมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน ที่หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ง่าย โดยครูใช้คำถามนำ ดังนี้

- มุมที่มีหน่วยเป็นองศา ที่หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ง่ายมีอะไรบ้าง

- มุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน ที่หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ง่ายมีอะไรบ้าง

3. ครูและนักเรียนอภิปรายเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ และมุมที่ไม่สามารถหาค่าตรีโกณมิติได้ง่ายอีกครั้ง

4. ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างมุมที่ไม่สามารถหาค่าตรีโกณมิติได้ง่าย พร้อมใช้คำถามนำดังนี้

- นักเรียนจะเขียนมุม 15° ให้อยู่ในรูปผลบวกหรือผลต่างของมุมที่หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ง่ายได้อย่างไร

-นักเรียนจะเขียนมุม $\frac{\pi}{12}$ ให้อยู่ในรูปผลต่างหรือผลบวกของมุมที่หาค่าฟังก์ชัน

ตรีโกณมิติได้ง่ายได้อย่างไร

5. ครูให้นักเรียนยกตัวอย่างมุมที่ไม่สามารถหาค่าตรีโกณมิติได้ง่ายด้วยตนเอง พร้อมทั้งเขียนมุมนั้นให้อยู่ในรูปผลบวกหรือผลต่างของมุมที่หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ง่าย และให้เพื่อนช่วยตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นการสังเกต

6. ครูแจกใบกิจกรรมที่ 1.1 เรื่อง การหาฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ให้นักเรียนทำเป็นรายบุคคล และครูให้นักเรียนสังเกตปัญหาต่างๆ ผ่านการใช้คำถามนำ

ของครู ดังนี้

จากข้อ 1.1 ครูใช้คำถามนำ ดังนี้

-นักเรียนจะสามารถแก้สมการ $\sqrt{(x_3-1)^2+(y_3)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ได้อย่างไร โดยจัดรูป x_3 ให้อยู่ในรูปของ x_1, x_2 และ y_1, y_2

-จากค่า x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 ที่ครูกำหนดให้ และสมการที่ (1) นักเรียนสามารถสรุปเป็นสมการใหม่ได้อย่างไร

จากข้อ 1.2 ครูใช้คำถามนำ ดังนี้

-นักเรียนจะสามารถหาค่าของ $\cos(A+B)$ และสรุปเป็นสูตรใหม่ได้อย่างไร

จากข้อ 2 ครูใช้คำถามนำ ดังนี้

-จาก $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ แล้ว $\sin(A+B)$ มีค่าเท่ากับเท่าไร ในรูปฟังก์ชันของ \cos

-จาก $\sin(A+B) = \cos\left[\frac{\pi}{2}-(A+B)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-A\right)-B\right]$ แล้ว

สามารถจัดรูปใหม่ให้กับ $\sin(A+B)$ ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ \sin หรือ \cos ได้อย่างไร

-นักเรียนสามารถจัดรูปใหม่ให้กับ $\sin(A-B)$ ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ \sin หรือ \cos ได้อย่างไร

จากข้อ 3 ครูใช้คำถามนำ ดังนี้

-จาก $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ แล้ว $\tan(A-B)$ จะมีค่าเท่าไรในรูปเศษส่วนของฟังก์ชันของ \sin

และ \cos

-จาก $\tan(A-B) = \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}$ นักเรียนจะสามารถจัดรูปใหม่ให้กับ $\tan(A-B)$ ให้เกิด

เป็นสูตรที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ \tan ได้อย่างไร

-นักเรียนจะสามารถจัดรูปใหม่ให้กับ $\tan(A+B)$ ให้เกิดเป็นสูตรที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ \tan ได้อย่างไร

7. ครูให้นักเรียนพิจารณาสูตรต่าง ๆ ทั้งของ $\cos(A-B)$, $\cos(A+B)$, $\sin(A-B)$

$\sin(A+B)$, $\tan(A-B)$ และ $\tan(A+B)$ ที่นักเรียนสรุปได้จากข้อ 1, 2 และ 3 ในใบกิจกรรมที่ 1.1 ว่าเมื่อนำมาบวกหรือลบกันจะได้รับความสัมพันธ์อื่น ๆ ด้วยหรือไม่

8. ครูให้นักเรียนทำโจทย์ข้อที่ 4 ในใบกิจกรรมที่ 1.1 ด้วยตนเอง โดยครูใช้คำถามกระตุ้น ดังนี้

-จากข้อที่ 1, 2, 3 และ 4 ข้อย นักเรียนสามารถแยกมุมเหล่านี้ให้อยู่ในรูปผลบวกหรือผลต่างของมุมที่หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ง่ายได้อย่างไร จะได้เป็นผลบวกหรือผลต่างของมุมอะไรบ้าง และควรจะใช้สูตรใดในการหาค่าโจทย์เหล่านั้น

-จากข้อ 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ครูให้นักเรียนพิจารณาว่า นักเรียนจะแก้ปัญหাজョทย์เหล่านี้ได้อย่างไร โดยการใชสูตรฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

-จากข้อ 12.1 โจทย์กำหนดเพียง ค่าของ $\sin A$ และ $\cos B$ นักเรียนคิดว่านักเรียนจะสามารถหาค่า $\cos A$ และ $\sin B$ ได้อย่างไร (ถ้านักเรียนยังไม่สามารถหาวิธีได้ ครูอาจจะแนะแนวทางโดยการให้ลองวาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก) สำหรับข้อ 12.2 ก็ปฏิบัติในลักษณะเดียวกัน

ภาพที่ 2

9. ครูนำเสนอปัญหาโดยแจกใบกิจกรรมที่ 1.2 เรื่อง การแก้ปัญหและการให้เหตุผลเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ให้นักเรียนคิดแก้ปัญหาเป็นรายบุคคล ดังนี้

โจทย์ข้อที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน AB ยาวเท่ากับ 9 หน่วย ด้าน BC ยาวเท่ากับ 12 หน่วย และด้าน AC ยาวเท่ากับ 15 หน่วย จงหาค่า $\cos(A-C)$, $\sin(A+C)$ และ $\tan(A-C)$

โจทย์ข้อที่ 2 จงแสดงการพิสูจน์ว่า $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ พร้อมอธิบายแสดงแนวคิดหรือให้เหตุผลประกอบ

10. ครูให้นักเรียนร่วมกันสังเกตและทำความเข้าใจโจทย์ว่า โจทย์ถามอะไรและกำหนดอะไรมาให้บ้าง

ขั้นการอธิบายและปฏิบัติกิจกรรม

11. จากปัญหาโจทย์ข้อที่ 1 ครูให้นักเรียนดำเนินการตามขั้นตอนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน ลงในใบกิจกรรมที่ 1.2 ดังนี้

ขั้นที่ 1) ครูให้นักเรียนทำความเข้าใจว่า โจทย์ถามอะไรและกำหนดอะไรมาให้บ้าง โดยครูใช้คำถาม ดังนี้

- เมื่อนักเรียนพิจารณาโจทย์แล้ว สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้แก่อะไรบ้าง และสิ่งที่โจทย์ถามคืออะไร

โดยครูจะต้องคอยกระตุ้นให้นักเรียนตอบคำถามให้ครบถ้วน และสมบูรณ์จากนั้นครูให้นักเรียนบันทึกคำตอบลงในใบกิจกรรม

ขั้นที่ 2) ครูให้นักเรียนวางแผนการแก้ปัญหาจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยครูใช้คำถาม ดังนี้

- จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ นักเรียนนำมาใช้ในการวางแผนการแก้ปัญหาได้อย่างไร

ขั้นที่ 3) ครูให้นักเรียนแสดงวิธีหาคำตอบตามที่วางแผนไว้ โดยครูใช้คำถาม ดังนี้

- นักเรียนสามารถหาค่าของ $\cos(A-C)$, $\sin(A+C)$ และ $\tan(A-C)$ ได้อย่างไร โดยใช้สิ่งที่นักเรียนได้วางแผนมาจากขั้นที่ 2

จากนั้นครูให้นักเรียนพิจารณาคำตอบว่ามีการคำนวณถูกต้องหรือไม่ พร้อมให้นักเรียนแสดงเหตุผลประกอบ

ขั้นที่ 4) ครูให้นักเรียนพิจารณาสรุปคำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหา จากขั้นที่ 3

12. สำหรับปัญหาโจทย์ข้อที่ 2 ครูให้นักเรียนพิจารณา โจทย์ สิ่งที่โจทย์กำหนด และให้เหตุผลเกี่ยวกับแนวคิดของการพิสูจน์ของตนเอง โดยครูใช้คำถามนำ ดังนี้

- นักเรียนจะแสดงการพิสูจน์ว่า $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ ได้อย่างไร

หากนักเรียนไม่สามารถแก้โจทย์หรือแสดงการให้เหตุผลได้ ครูจะกระตุ้นโดยการใช้คำถามนำเพิ่มเติม เช่น เมื่อนักเรียนแสดงการพิสูจน์มาถึงขั้น $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ และนักเรียนไม่สามารถแสดงการพิสูจน์ต่อไปได้ ครูอาจจะถามว่า นักเรียนสามารถแทนค่า $\cos^2 A$ ด้วยฟังก์ชัน \sin ได้หรือไม่อย่างไร

13. ครูสุ่มนักเรียนออกมานำเสนอวิธีคิดและคำตอบที่ได้หน้าชั้นเรียน จากนั้นครูและเพื่อนนักเรียนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นสรุป

14. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายและสรุปเกี่ยวกับ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหา และการแสดงแนวคิดหรือการให้เหตุผลในการพิสูจน์ โดยครูใช้คำถามนำหรือให้นักเรียนยกตัวอย่างเพิ่มเติม ดังนี้

-ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม มีสูตรหลักทั้งหมดกี่สูตรอะไรบ้าง และนักเรียนสามารถนำสูตรไปใช้ในการหาความสัมพันธ์อื่นๆ ของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้หรือไม่อย่างไร จงอธิบายและยกตัวอย่าง

-ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหามีกี่ขั้นตอนจงอธิบาย

หากนักเรียนยังไม่สามารถสรุปได้ ครูจะใช้คำถามนำเพิ่มเติม เพื่อให้นักเรียนสร้างข้อสรุปได้ด้วยตนเองอย่างถูกต้อง เช่น ถ้านักเรียนยังไม่สามารถสรุปได้ว่าขั้นตอนการแก้ปัญหามีกี่ขั้นตอน ครูควรอาจจะถามว่า ถ้านักเรียนพบโจทย์ปัญหา สิ่งแรกที่นักเรียนต้องพิจารณาคืออะไร และขั้นต่อมาควรจะทำอะไร เป็นต้น

ขั้นการประยุกต์ใช้

15. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมเพื่อให้เกิดความเข้าใจมากขึ้น จากนั้นครูจะให้นักเรียนออกมาเฉลย โดยครูและเพื่อนๆ นักเรียนช่วยกันตรวจสอบและร่วมแก้ไขให้มีความถูกต้อง

สื่อและแหล่งการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมที่ 1.1 เรื่อง การหาฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริง
2. ใบกิจกรรมที่ 1.2 เรื่อง การแก้ปัญหาและการให้เหตุผลเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริง
3. แบบฝึกหัดที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริง

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

สิ่งที่ต้องการวัด	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
ด้านความรู้ 1. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมโดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้	ประเมินจาก การตรวจผลงาน -ใบกิจกรรมที่ 1.1 -แบบฝึกหัดที่ 1	-ใบกิจกรรมที่ 1.1 -แบบฝึกหัดที่ 1	ผ่านเกณฑ์ที่ร้อยละ 70 ขึ้นไป
ด้านทักษะ / กระบวนการ 1. นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมโดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมไปใช้แก้ปัญหาได้ 2. นักเรียนสามารถแสดงแนวคิดหรืออ้างอิงเหตุผลเกี่ยวกับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้อย่างสมเหตุสมผล	ประเมินจาก การตรวจผลงาน -ใบกิจกรรมที่ 1.2 -แบบฝึกหัดที่ 1	-ใบกิจกรรมที่ 1.2 -แบบฝึกหัดที่ 1	ผ่านเกณฑ์ที่ร้อยละ 70 ขึ้นไป

บันทึกผลหลังการจัดการเรียนรู้

ผลการจัดการเรียนรู้

นักเรียนทุกคนให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม และสนใจในการเรียนเป็นอย่างดี แต่เมื่อครูใช้คำถามกับนักเรียน พบว่า นักเรียนยังไม่กล้าตอบคำถาม และไม่กล้าแสดงเหตุผลอาจ เพราะกลัวว่าคำตอบหรือเหตุผลของตนจะผิด แต่ครูก็พยายามกระตุ้นให้นักเรียนลองตอบคำถาม หรือแสดงเหตุผลตามสิ่งที่นักเรียนคิด ถ้านักเรียนตอบถูกแต่การอธิบายเหตุผลยังไม่ค่อยชัดเจน ครูจะคอยปรับภาษาของนักเรียนให้ดีขึ้น ในภายหลัง นอกจากนี้เมื่อครูให้นักเรียนแก้ปัญหาตาม ขั้นตอนการแก้ปัญหา พบว่า นักเรียนยังไม่คุ้นเคยกับการแก้ปัญหาตามขั้นตอน แต่ก็มีนักเรียน บางส่วนที่สามารถแสดงการแก้ปัญหาตามขั้นตอนได้เป็นอย่างดี และนอกจากนี้พบว่านักเรียนส่วนใหญ่สามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของ ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

ลงชื่อ ชมพูนุท รุ่งสว่าง
(นางสาวชมพูนุท รุ่งสว่าง)
ผู้สอน

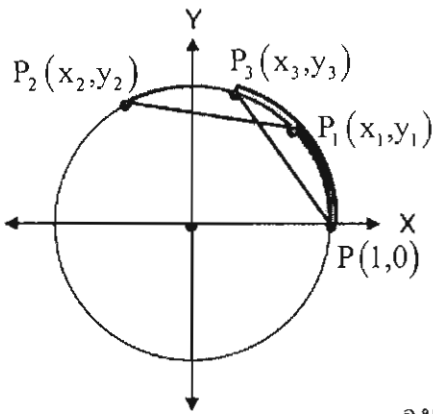
ใบกิจกรรมที่ 1.1

เรื่อง การหาฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ชื่อ.....นามสกุล.....ชั้น ม.5/.....เลขที่.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาและทำกิจกรรมที่กำหนดให้

1. การหาความสัมพันธ์ของ $\cos(A-B)$ และ $\cos(A+B)$



1.1 จากรูป กำหนดวงกลมหนึ่งหน่วยบนระนาบพิกัดจาก

และให้ส่วนโค้ง $PP_2=A$, $PP_1=B$

ให้ P_3 เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ทำให้

ส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับส่วนโค้ง P_1P_2

ดังนั้น $PP_3 = P_1P_2 = A - B$

และจะได้ว่า $|PP_3| = |P_1P_2|$

$$\sqrt{(x_3-1)^2+(y_3)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\text{จงแก้สมการ } \sqrt{(x_3-1)^2+(y_3)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

.....

$$x_3 = \dots\dots\dots (1)$$

เนื่องจากจุด (x_1, y_1) , (x_2, y_2) และ (x_3, y_3) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว B , A , $A-B$ หน่วยตามลำดับ จะได้

$$x_1 = \cos B \quad , \quad y_1 = \sin B$$

$$x_2 = \cos A \quad , \quad y_2 = \sin A$$

$$x_3 = \cos(A-B)$$

ดังนั้น จากสมการ (1) จะได้

$$\cos(A-B) = \dots\dots\dots$$

ถ้าลองนำค่า $\cos(A-B)$ ไปหาค่าของ $\cos(A+B)$ จะได้ ดังนี้

1.2 $\cos(A+B) = \cos[A-(-B)]$

=

=.....

สรุปเป็นสูตรได้ว่า

$\cos(A-B) = \dots\dots\dots$ $\cos(A+B) = \dots\dots\dots$
--

2. การหาความสัมพันธ์ของ $\sin(A-B)$ และ $\sin(A+B)$

เนื่องจาก $\sin(A+B) = \cos\left[\frac{\pi}{2}-(A+B)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-A\right)-B\right]$

=.....
 =.....
 =.....

ดังนั้น $\sin(A+B) = \dots\dots\dots$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\sin(A-B) = \dots\dots\dots$

3. การหาความสัมพันธ์ของ $\tan(A-B)$ และ $\tan(A+B)$

เนื่องจาก $\tan(A-B) = \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}$

=.....
 =.....
 =.....
 =.....

ดังนั้น $\tan(A-B) = \dots\dots\dots$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\tan(A+B) = \dots\dots\dots$

จากค่าของ $\cos(A-B)$, $\cos(A+B)$, $\sin(A-B)$ และ $\sin(A+B)$ เมื่อนำมาบวกหรือลบกันจะได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ $2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$ $2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$
--

$\sin 2A = 2\sin A \cos A$ $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\sin A + \sin B = 2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ $\sin A - \sin B = 2\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$ $\cos A + \cos B = 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ $\cos A - \cos B = -2\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$

ใบกิจกรรมที่ 1.2

เรื่อง การแก้ปัญหาและการให้เหตุผลเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ชื่อ.....นามสกุล.....ชั้น ม.5/.....เลขที่.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

โจทย์ข้อที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน AB ยาวเท่ากับ 9 หน่วย ด้าน BC ยาวเท่ากับ 12 หน่วย และด้าน AC ยาวเท่ากับ 15 หน่วย จงหาค่า $\cos(A-C)$, $\sin(A+C)$ และ $\tan(A-C)$

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่

.....

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ

.....

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้หรือจากรูปสามเหลี่ยมทำให้เราทราบว่า

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \dots\dots\dots \quad \sin A = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \quad \tan A = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\cos C = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \quad \sin C = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \quad \tan C = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา คือหาค่า $\cos(A-C)$, $\sin(A+C)$ และ $\tan(A-C)$

จะได้ $\cos(A-C) = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$\sin(A+C) = \dots\dots\dots$

แบบฝึกหัดที่ 1

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด ต่อไปนี้

1. ถ้า $\tan A = 2$ และ $A + B = 135^\circ$ เมื่อ B เป็นมุมแหลม แล้ว $\cos B$ มีค่าเท่าใด
2. กำหนดให้ $\tan A = -\frac{3}{4}$ จงหาค่าของ $\sin 2A$, $\cos 2A$ และ $\tan 2A$ เมื่อ $90^\circ < A < 180^\circ$
3. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีด้าน AB ยาว 3 หน่วย ด้าน BC ยาว 4 หน่วย และด้าน AC ยาว 5 หน่วย จงหาค่า $\cos(A+C)$, $\sin(A-C)$ และ $\tan(A-C)$
4. จงแสดงการพิสูจน์ พร้อมอธิบาย แสดงแนวคิดประกอบหรือให้เหตุผลประกอบ ว่า

$$4.1. \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}$$

$$4.2. \frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} = \frac{\tan A + \tan B}{\tan A - \tan B}$$

เกณฑ์การให้คะแนนแบบฝึกหัดวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

รายการประเมิน	คะแนน	เกณฑ์พิจารณา
1. ขั้นทำความเข้าใจ ปัญหา	2	- ระบุว่าปัญหามีอะไร กำหนดอะไรมาบ้าง และมีเงื่อนไข อย่างไรได้อย่างถูกต้อง
	1	- ระบุว่าปัญหามีอะไร กำหนดอะไรมาบ้าง และมีเงื่อนไข อย่างไรได้ถูกต้องบางส่วน
	0	- ระบุว่าปัญหามีอะไร กำหนดอะไรมาบ้าง และมีเงื่อนไข อย่างไรได้ไม่ถูกต้อง
2. ขั้นวางแผนการ แก้ปัญหา	2	- แสดงความสัมพันธ์ต่างๆจากข้อมูลหรือเงื่อนไขที่กำหนดให้ ได้ถูกต้อง และเลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ถูกต้อง เหมาะสม สอดคล้องกับปัญหา
	1	- แสดงความสัมพันธ์ต่างๆจากข้อมูลหรือเงื่อนไขที่กำหนดให้ ถูกต้อง แต่เลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ไม่เหมาะสม หรือไม่ครอบคลุมประเด็นของปัญหา
	0	- แสดงความสัมพันธ์ต่างๆจากข้อมูลหรือเงื่อนไขที่กำหนดให้ ไม่ถูกต้อง หรือเลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ไม่ถูกต้อง
3. ขั้นดำเนินการ ตามแผน	2	- นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้อง และแสดงการ แก้ปัญหาเป็นลำดับขั้นตอนได้อย่างชัดเจน
	1	- นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้อง แต่การแสดงลำดับ ขั้นตอนการแก้ปัญหายังไม่ชัดเจน หรือมีการแทนค่า หรือ คำนวณที่ผิดพลาด
	0	- นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดงลำดับ ขั้นตอนการแก้ปัญหา
4. ขั้นการสรุป คำตอบ	1	- สรุปคำตอบได้ถูกต้อง สมบูรณ์
	0	- ไม่มีการสรุปคำตอบ หรือสรุปคำตอบไม่ถูกต้อง

เกณฑ์การให้คะแนนแบบฝึกหัดวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ระดับคะแนน	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
4	- มีการอธิบายแสดงแนวคิดหรือมีการอ้างอิงเหตุผลประกอบการตัดสินใจ และแสดงข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล
3	- มีการอธิบายแสดงแนวคิดหรือมีการอ้างอิงเหตุผลประกอบการตัดสินใจ และแสดงข้อสรุปค่อนข้างสมเหตุสมผล หรือมีการอ้างอิงเหตุผลผิดพลาดเล็กน้อย
2	- มีการอธิบายหรือการอ้างอิงแสดงแนวคิดประกอบการตัดสินใจ หรือแสดงข้อสรุปที่สมเหตุสมผลเพียงบางส่วน
1	- มีความพยายามอธิบายหรือแสดงแนวคิดประกอบการตัดสินใจ แต่ไม่มีการแสดงข้อสรุป หรือแสดงข้อสรุปแต่ไม่สมเหตุสมผล
0	- ไม่มีการอธิบายหรือแสดงแนวคิดประกอบคำตอบ หรือไม่มีการเขียนใดๆ

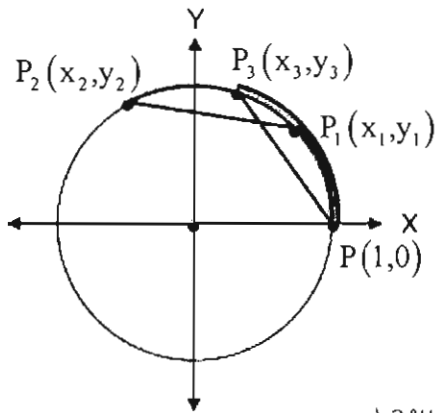
เฉลยใบกิจกรรมที่ 1.1

เรื่อง การหาฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ชื่อ.....นามสกุล.....ชั้น ม.5/.....เลขที่.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาและทำกิจกรรมที่กำหนดให้

1. การหาความสัมพันธ์ของ $\cos(A-B)$ และ $\cos(A+B)$



1.1 จากรูป กำหนดวงกลมหนึ่งหน่วยบนระนาบพิกัดฉาก

และให้ส่วนโค้ง $PP_2=A$, $PP_1=B$

ให้ P_3 เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ทำให้

ส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับส่วนโค้ง P_1P_2

ดังนั้น $PP_3 = P_1P_2 = A - B$

และจะได้ว่า $|PP_3| = |P_1P_2|$

$$\sqrt{(x_3-1)^2+(y_3)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

จึงแก้สมการ $\sqrt{(x_3-1)^2+(y_3)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$(x_3-1)^2+(y_3)^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

$$x_3^2 - 2x_3 + 1 + y_3^2 = x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2$$

$$-2x_3 + 1 + 1 = -2x_2x_1 + 1 - 2y_2y_1 + 1$$

$$-2x_3 + 2 = -2x_2x_1 - 2y_2y_1 + 2$$

$$x_3 = x_2x_1 - y_2y_1$$

$$x_3 = x_2x_1 - y_2y_1 \quad \text{_____ (1)}$$

เนื่องจากจุด (x_1, y_1) , (x_2, y_2) และ (x_3, y_3) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว B , A , $A-B$ หน่วยตามลำดับ จะได้

$$x_1 = \cos B \quad , \quad y_1 = \sin B$$

$$x_2 = \cos A \quad , \quad y_2 = \sin A$$

$$x_3 = \cos(A-B)$$

ดังนั้น จากสมการ (1) จะได้ $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

ถ้าลองนำค่า $\cos(A-B)$ ไปหาค่าของ $\cos(A+B)$ จะได้ ดังนี้

1.2 $\cos(A+B) = \cos[A-(-B)]$

$$= \cos A \cos(-B) + \sin A \sin(-B)$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

สรุปเป็นสูตรได้ว่า $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

2. การหาความสัมพันธ์ของ $\sin(A-B)$ และ $\sin(A+B)$

$$\text{เนื่องจาก } \sin(A+B) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (A+B)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - B\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\cos B + \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\sin B$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

3. การหาความสัมพันธ์ของ $\tan(A-B)$ และ $\tan(A+B)$

$$\text{เนื่องจาก } \tan(A-B) = \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)} = \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B + \sin A \sin B}$$

$$= \frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}$$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B}$$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B}$$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\text{ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า } \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

จากค่าของ $\cos(A-B)$, $\cos(A+B)$, $\sin(A-B)$ และ $\sin(A+B)$ เมื่อนำมาบวกหรือลบกันจะได้ความสัมพันธ์ ต่อไปนี้

$$2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

$$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\sin 2A = 2\sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$$

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

4.จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 1. \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\
 &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \sin \frac{17\pi}{12} &= \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) \\
 &= \sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{2\pi}{3} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
 &= -\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \tan 15^\circ &= \tan(45^\circ - 30^\circ) \\
 &= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \\
 &= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + (1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \\
 &= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \sin \frac{7\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) \\
 &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{18} + \cos \frac{\pi}{9} \sin \frac{\pi}{18} &= \sin \left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{18} \right) \\
 &= \sin \left(\frac{3\pi}{18} \right) \\
 &= \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \cos 65^\circ \cos 20^\circ + \sin 65^\circ \sin 20^\circ &= \cos(65^\circ - 20^\circ) \\
 &= \cos 45^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. 6 \sin 75^\circ \cos 15^\circ &= 3(2 \sin 75^\circ \cos 15^\circ) \\
 &= 3[\sin(75 + 15) + \sin(75 - 15)] \\
 &= 3(\sin 90^\circ + \sin 60^\circ) \\
 &= 3 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. 4 \sin 75^\circ \sin 15^\circ &= 2(2 \sin 75^\circ \sin 15^\circ) \\
&= 2[\cos(75 - 15) - \cos(75 + 15)] \\
&= 2(\cos 60^\circ - \cos 90^\circ) \\
&= 2\left(\frac{1}{2} - 0\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \frac{\cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ} &= \frac{\cos 10^\circ + \sin(30^\circ + 10^\circ)}{\sin(60^\circ + 10^\circ)} \\
&= \frac{\cos 10^\circ + \sin 30^\circ \cos 10^\circ + \cos 30^\circ \sin 10^\circ}{\sin 60^\circ \cos 10^\circ + \cos 60^\circ \sin 10^\circ} \\
&= \frac{\cos 10^\circ + \frac{1}{2} \cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 10^\circ + \frac{1}{2} \sin 10^\circ} \\
&= \frac{\frac{3}{2} \cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 10^\circ + \frac{1}{2} \sin 10^\circ} \\
&= \frac{3 \cos 10^\circ + \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\frac{\sqrt{3} \cos 10^\circ + \sin 10^\circ}{2}} \\
&= \frac{3 \cos 10^\circ + \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sqrt{3} \cos 10^\circ + \sin 10^\circ} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}(3 \cos 10^\circ + \sqrt{3} \sin 10^\circ)}{3 \cos 10^\circ + \sqrt{3} \sin 10^\circ} \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \sin 75^\circ + \sin 15^\circ &= 2 \sin \frac{75+15}{2} \cos \frac{75-15}{2} \\
 &= 2 \sin \frac{90}{2} \cos \frac{60}{2} \\
 &= 2 \sin 45 \cos 30 \\
 &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{6}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. \cos 105^\circ + \cos 195^\circ &= 2 \cos \frac{195+105}{2} \cos \frac{195-105}{2} \\
 &= 2 \cos 105^\circ \cos 45^\circ \\
 &= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= -\frac{\sqrt{6}}{2}
 \end{aligned}$$

12. กำหนด $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{4}{5}$ เมื่อ A และ B อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 จงหา

$$\begin{aligned}
 12.1 \sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\
 &= \left(\frac{3}{5} \right) \left(\frac{4}{5} \right) + \left(\frac{4}{5} \right) \left(\frac{3}{5} \right) \\
 &= \frac{12+12}{25} \\
 &= \frac{24}{25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.2 \sin(A-B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \\
 &= \left(\frac{3}{5} \right) \left(\frac{4}{5} \right) - \left(\frac{4}{5} \right) \left(\frac{3}{5} \right) \\
 &= \frac{12-12}{25} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

เฉลยใบกิจกรรมที่ 1.2

เรื่อง การแก้ปัญหาและการให้เหตุผลเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ชื่อ.....นามสกุล.....ชั้น ม.5/.....เลขที่.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

โจทย์ข้อที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน AB ขาวเท่ากับ 9 หน่วย ด้าน BC ขาวเท่ากับ 12 หน่วย และด้าน AC ขาวเท่ากับ 15 หน่วย จงหาค่า $\cos(A-C)$, $\sin(A+C)$ และ $\tan(A-C)$

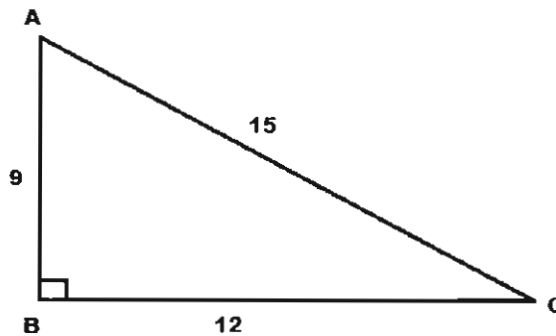
วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน AB ขาวเท่ากับ 9 หน่วย ด้าน BC ขาวเท่ากับ 12 หน่วย และด้าน AC ขาวเท่ากับ 15 หน่วย

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ $\cos(A-C)$, $\sin(A+C)$ และ $\tan(A-C)$

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้หรือจากรูปสามเหลี่ยมทำให้เราทราบว่า

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{15} \quad \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{15} \quad \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{9}$$

$$\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{15} \quad \sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{15} \quad \tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{9}{12}$$

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา คือหาค่า $\cos(A-C)$, $\sin(A+C)$ และ $\tan(A-C)$

จะได้ $\cos(A-C) = \cos A \cos C + \sin A \sin C$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{9}{15}\right)\left(\frac{12}{15}\right) + \left(\frac{12}{15}\right)\left(\frac{9}{15}\right) \\ &= \frac{216}{225} = \frac{24}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin(A+C) &= \sin A \cos C + \cos A \sin C \\
 &= \left(\frac{12}{15}\right)\left(\frac{12}{15}\right) + \left(\frac{9}{15}\right)\left(\frac{9}{15}\right) \\
 &= \frac{225}{225} = 1 \\
 \tan(A-C) &= \frac{\tan A - \tan C}{1 + \tan A \tan C} \\
 &= \frac{\left(\frac{12}{9}\right) - \left(\frac{9}{12}\right)}{1 + \left(\frac{12}{9}\right)\left(\frac{9}{12}\right)} \\
 &= \frac{7}{24}
 \end{aligned}$$

4. ขั้นสรุปคำตอบ

ดังนั้น $\cos(A-C) = \frac{24}{25}$, $\sin(A+C) = 1$ และ $\tan(A-C) = \frac{7}{24}$

โจทย์ข้อที่ 2 จงแสดงการพิสูจน์ว่า $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ พร้อมอธิบายแสดงแนวคิด หรือให้เหตุผลประกอบ

วิธีทำ

จาก $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

ดังนั้น $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

จาก $\cos 2A = \cos(A+A)$

$= \cos A \cos A - \sin A \sin A$ (เนื่องจาก $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$)

$= \cos^2 A - \sin^2 A$

$= (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A$ (เนื่องจาก $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$)

$= 1 - 2\sin^2 A$

ดังนั้น $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

1. ถ้า $\tan A = 2$ และ $A + B = 135^\circ$ เมื่อ B เป็นมุมแหลม แล้ว $\cos B$ มีค่าเท่าใด

วิธีทำ จาก $A + B = 135^\circ$

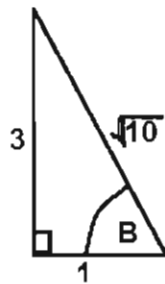
$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \tan(A+B) &= \tan 135^\circ \\ &= \tan(90^\circ + 45^\circ) \\ &= -\tan 45^\circ \\ &= -1 \end{aligned}$$

แสดงว่า $\tan(A+B) = -1$

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad \tan(A+B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ -1 &= \frac{2 + \tan B}{1 - 2 \tan B} \quad (\text{แทน } \tan A = 2) \\ -1 + 2 \tan B &= 2 + \tan B \end{aligned}$$

$$\text{จะได้} \quad \tan B = 3$$

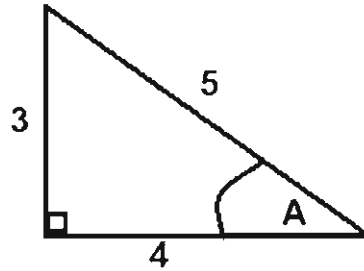
นำ $\tan B = 3$ มาเขียนเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากเพื่อหา $\cos B$ ดังนี้



ดังนั้น จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ $\cos B = \frac{1}{\sqrt{10}}$

2. กำหนดให้ $\tan A = -\frac{3}{4}$ จงหาค่าของ $\sin 2A$, $\cos 2A$ และ $\tan 2A$ เมื่อ $90^\circ < A < 180^\circ$

วิธีทำ จาก $\tan A = -\frac{3}{4}$ เมื่อ $90^\circ < A < 180^\circ$ จะได้ว่า A อยู่ในควอดรันต์ที่ 2
สามารถเขียนเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากได้ ดังนี้



$$\text{ดังนั้น } \sin A = \frac{3}{5} \text{ และ } \cos A = -\frac{4}{5}$$

-หาค่า $\sin 2A$

$$\begin{aligned} \sin 2A &= 2\sin A \cos A \\ &= 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= -\frac{24}{25} \end{aligned}$$

-หาค่า $\cos 2A$

$$\begin{aligned} \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{7}{25} \end{aligned}$$

-หาค่า $\tan 2A$

$$\begin{aligned} \tan 2A &= \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \\ &= \frac{2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= -\frac{24}{7} \end{aligned}$$

3. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีด้าน AB ยาว 3 หน่วย ด้าน BC ยาว 4 หน่วย และด้าน AC ยาว 5 หน่วย จงหาค่า $\cos(A+C)$, $\sin(A-C)$ และ $\tan(A-C)$

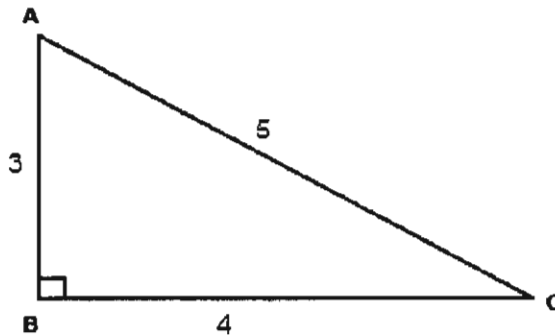
วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้แก่ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน BC ยาวเท่ากับ 4 หน่วย ด้าน AC ยาวเท่ากับ 5 หน่วย

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ $\cos(A+C)$, $\sin(A-C)$ และ $\tan(A-C)$

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้หรือจากรูปสามเหลี่ยมทำให้เราทราบว่า

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} & \sin A &= \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} & \tan A &= \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4} \\ \cos C &= \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5} & \sin C &= \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} & \tan C &= \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา คือหาค่า $\cos(A+C)$, $\sin(A-C)$ และ $\tan(A-C)$

จะได้ $\cos(A+C) = \cos A \cos C - \sin A \sin C$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\sin(A-C) = \sin A \cos C - \cos A \sin C$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) \\ &= \frac{-7}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(A-C) &= \frac{\tan A - \tan C}{1 + \tan A \tan C} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)} \\ &= \frac{7}{24}\end{aligned}$$

4. ขั้นสรุปคำตอบ

ดังนั้น $\cos(A+C) = 0$, $\sin(A-C) = \frac{-7}{25}$ และ $\tan(A-C) = \frac{7}{24}$

4. จงแสดงการพิสูจน์ พร้อมอธิบาย แสดงแนวคิดประกอบหรือให้เหตุผลประกอบ ว่า

4.1. $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$$\text{ดังนั้น } \cos 2\frac{A}{2} = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$\text{จะได้ } \cos A = \left(1 - \sin^2 \frac{A}{2}\right) - \sin^2 \frac{A}{2} \quad (\text{เนื่องจาก } \cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2} = 1)$$

$$\cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$$

$$2\sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A$$

$$\text{ดังนั้น } \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}$$

$$4.2 \quad \frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} = \frac{\tan A + \tan B}{\tan A - \tan B}$$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} &= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\sin A \cos B - \cos A \sin B} \\ &= \frac{\frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}} \\ &= \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B}} \\ &= \frac{\tan A + \tan B}{\tan A - \tan B} \quad (\text{เนื่องจาก } \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A, \frac{\sin B}{\cos B} = \tan B) \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} = \frac{\tan A + \tan B}{\tan A - \tan B}$$

แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
รหัสวิชา ค 32201 รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ชื่อ.....สกุล.....ชั้น.....เลขที่.....

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำทุกข้ออย่างละเอียด

1. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน AB ยาวเท่ากับ 3 หน่วย ด้าน BC ยาวเท่ากับ 4 หน่วย และด้าน AC ยาวเท่ากับ 5 หน่วย จงหาค่า $\cos(A-C)$ และ $\sin(A-C)$

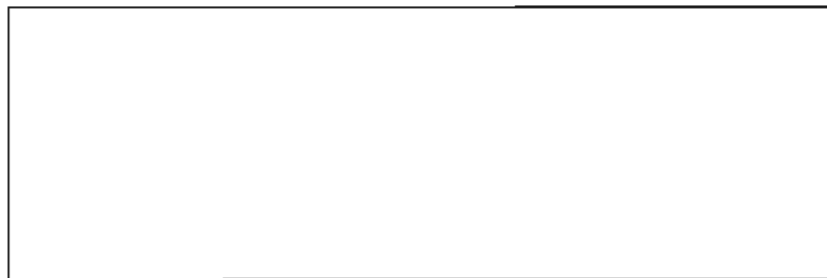
1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่.....

.....

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ.....

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา**

.....

.....

.....

.....

3. **ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา**

.....

.....

.....

.....

4. **ขั้นสรุปคำตอบ**

.....

.....

ชื่อ.....สกุล.....ชั้น.....เลขที่.....

2. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{AB} และ \overline{BC} ขาวด้านละ 15 และ 36 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\widehat{A}CB = \theta$ และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{DE} และ \overline{EF} ขาวด้านละ 8 และ 15 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\widehat{D}FE = \alpha$ จงหาค่า $\cos\left(\arcsin\frac{15}{39} - \arccos\frac{15}{17}\right)$

1. ชั้นทำความเข้าใจปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่.....

.....

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ.....

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ชั้นวางแผนการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

.....

3. ชั้นดำเนินการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

4. ชั้นสรุปคำตอบ

.....

.....

ชื่อ.....สกุล.....ชั้น.....เลขที่.....

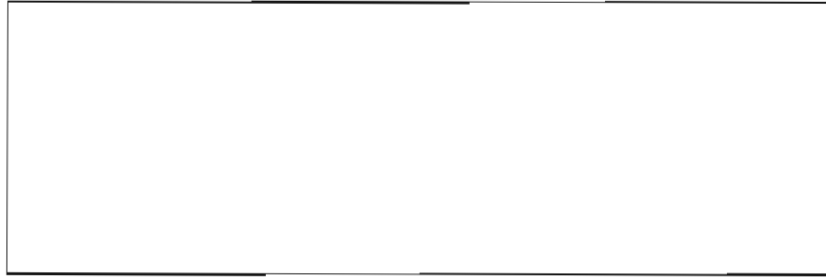
3. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{AB} และ \overline{AC} ยาวด้านละ $\sqrt{2}$ และ 2 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\hat{A}CB = 45^\circ$ และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{DE} และ \overline{DF} ยาวด้านละ 1 และ 2 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\hat{D}FE = 30^\circ$ จงหาค่า $\sin(45^\circ + 30^\circ)$

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่.....

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ.....

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

.....

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา

.....

4. ขั้นสรุปคำตอบ

.....

ชื่อ.....สกุล.....ชั้น.....เลขที่.....

4. นิยมยืนอยู่บนคาบฟ้าตึกหลังหนึ่ง มองเห็นรถยนต์เป็นมุมก้ม 30 องศา และรถยนต์จอดอยู่ริมถนนในแนวเดียวกับตึก ถ้าวัดรถยนต์อยู่ห่างจากตึก 100 เมตร จงหาหาความสูงของตึกนี้ เมื่อนิยมสูง 1.60 เมตร

(กำหนด $\sqrt{3} = 1.732$)

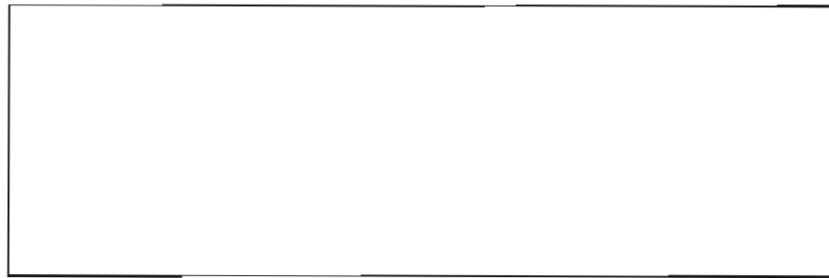
1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่.....

.....

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ.....

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นสรุปคำตอบ

.....

.....

ชื่อ.....สกุล.....ชั้น.....เลขที่.....

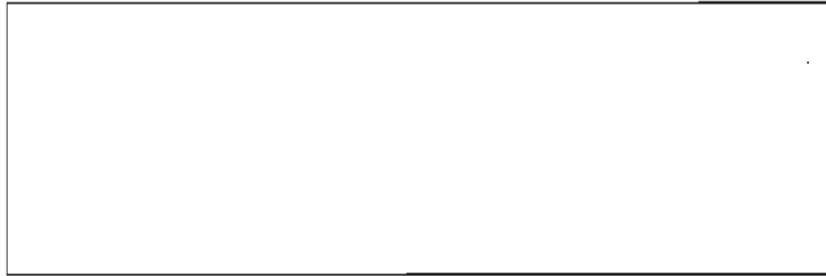
5. จงหาความยาวของเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมีฐานยาว 60 หน่วยและขนาดของมุมยอดเป็น 30 องศา

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่.....

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ.....

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

.....

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา

.....

4. ขั้นสรุปคำตอบ

.....

ชื่อ.....สกุล.....ชั้น.....เลขที่.....

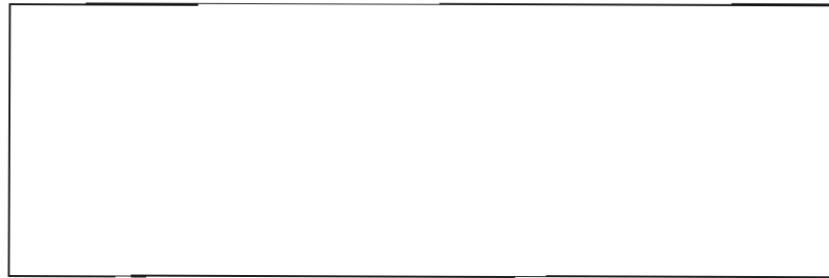
6. สนวนห่ออมรูปสามเหลี่ยมมีมุมมุมหนึ่งขนาด 73 องศา ด้านประกอบมุมนั้นยาว 36 เมตร และ 51 เมตร จงหาว่า สนวนห่ออมมีความยาวรอบรูปเท่าไร (กำหนด $\cos 73^\circ = 0.2924$)

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่.....

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ.....

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

.....

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา

.....

4. ขั้นสรุปคำตอบ

.....

เฉลยแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
รหัสวิชา ค 32201 รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ชื่อ.....สกุล.....ชั้น.....เลขที่.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำทุกข้ออย่างละเอียด

1. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน AB ขาวเท่ากับ 3 หน่วย ด้าน BC ขาวเท่ากับ 4 หน่วย และด้าน AC ขาวเท่ากับ 5 หน่วย จงหาค่า $\cos(A-C)$ และ $\sin(A-C)$

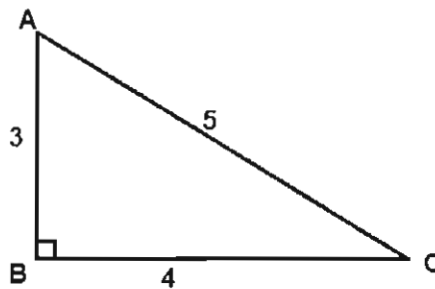
วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน AB ขาวเท่ากับ 3 หน่วย
ด้าน BC ขาวเท่ากับ 4 หน่วย และด้าน AC ขาวเท่ากับ 5 หน่วย

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ ค่าของ $\cos(A-C)$ และ $\sin(A-C)$

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} & \sin A &= \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5} & \tan A &= \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3} \\ \cos C &= \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5} & \sin C &= \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} & \tan C &= \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา

$$\begin{aligned} \cos(A-C) &= \cos A \cos C + \sin A \sin C & \sin(A-C) &= \sin A \cos C - \cos A \sin C \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) & &= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) \\ &= \frac{12}{25} + \frac{12}{25} & &= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} \\ &= \frac{24}{25} & &= \frac{7}{25} \end{aligned}$$

4. ขั้นสรุปคำตอบ

$$\text{ดังนั้น } \cos(A-C) = \frac{24}{25} \text{ และ } \sin(A-C) = \frac{7}{25}$$

2. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{AB} และ \overline{BC} ยาวด้านละ 15 และ 36 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\widehat{A \hat{C} B} = \theta$ และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{DE} และ \overline{EF} ยาวด้านละ 8 และ 15 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\widehat{D \hat{F} E} = \alpha$ จงหาค่า $\cos\left(\arcsin\frac{15}{39} - \arccos\frac{15}{17}\right)$

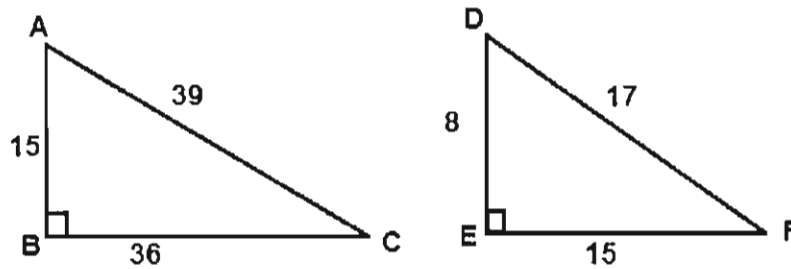
วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{AB} ยาว 15 หน่วย ด้าน \overline{BC} ยาว 36 หน่วย และมีมุม $\widehat{A \hat{C} B} = \theta$ และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{DE} ยาว 8 หน่วย ด้าน \overline{EF} ยาว 15 หน่วย และมีมุม $\widehat{D \hat{F} E} = \alpha$

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ ค่าของ $\cos\left(\arcsin\frac{15}{39} - \arccos\frac{15}{17}\right)$

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

$$\arcsin\frac{15}{39} = \theta \quad \text{จะได้} \quad \tan\theta = \frac{15}{36}, \quad \sin\theta = \frac{15}{39}, \quad \cos\theta = \frac{36}{39}$$

$$\arccos\frac{15}{17} = \alpha \quad \text{จะได้} \quad \cos\alpha = \frac{15}{17}, \quad \sin\alpha = \frac{8}{17}$$

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \cos\left(\arcsin\frac{15}{39} - \arccos\frac{15}{17}\right) &= \cos(\theta - \alpha) \\ &= \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha \\ &= \left(\frac{36}{39}\right)\left(\frac{15}{17}\right) - \left(\frac{15}{39}\right)\left(\frac{8}{17}\right) \\ &= \frac{660}{663} - \frac{120}{663} \\ &= \frac{540}{663} = \frac{180}{221} \end{aligned}$$

4. ขั้นสรุปคำตอบ

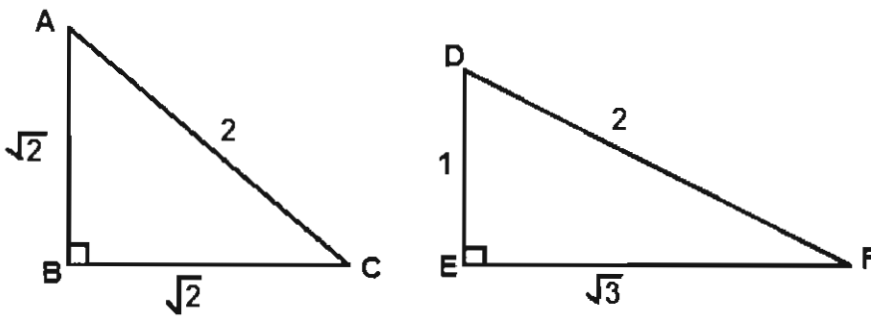
$$\text{ดังนั้น} \quad \cos\left(\arcsin\frac{15}{39} - \arccos\frac{15}{17}\right) = \frac{180}{221}$$

3. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{AB} และ \overline{AC} ยาวด้านละ $\sqrt{2}$ และ 2 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\hat{A}CB = 45^\circ$ และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{DE} และ \overline{DF} ยาวด้านละ 1 และ 2 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\hat{D}FE = 30^\circ$ จงหาค่า $\sin(45^\circ + 30^\circ)$

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{AB} ยาว $\sqrt{2}$ หน่วย ด้าน \overline{AC} ยาว 2 หน่วย และมีมุม $\hat{A}CB = 45^\circ$ และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF รูปหนึ่ง มีด้าน \overline{DE} ยาว 1 หน่วย ด้าน \overline{DF} ยาว 2 หน่วย ตามลำดับ และมีมุม $\hat{D}FE = 30^\circ$ สิ่งที่ต้องหาคือ ค่าของ $\sin(45^\circ + 30^\circ)$ จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

จะได้ $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา

$$\sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

4. ขั้นสรุปคำตอบ

$$\text{ดังนั้น } \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

4. นิยมยืนอยู่บนศาลาฟ้าตึกหลังหนึ่ง มองเห็นรถยนต์เป็นมุมก้ม 30° องศา และรถยนต์จอดอยู่ริมถนนในแนวเดียวกับตึก ถ้ารถยนต์อยู่ห่างจากตึก 100 เมตร จงหาความสูงของตึกนี้
เมื่อนิยมสูง 1.60 เมตร (กำหนด $\sqrt{3} = 1.732$)

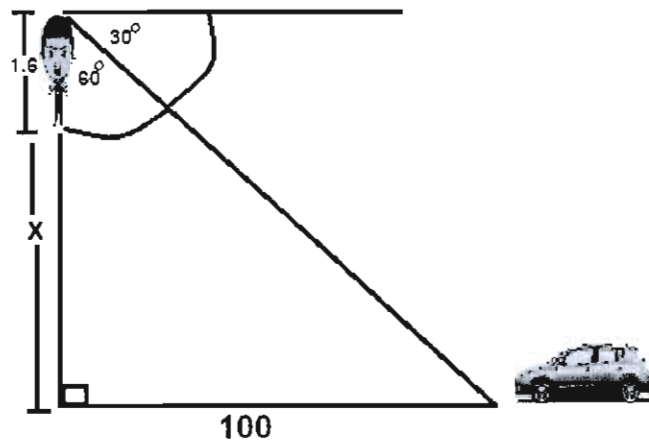
วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่ มุมก้ม 30° รถจอดห่างจากตึก 100 เมตร คนสูง 1.60 เมตร (กำหนด $\sqrt{3} = 1.732$)

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ หาความสูงของตึก

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

$$\tan 60^\circ = \frac{100}{x+1.6}$$

$$\sqrt{3} = \frac{100}{x+1.6}$$

3. ขั้นตอนการแก้ปัญหา

$$\tan 60^\circ = \frac{100}{x+1.6}$$

$$\sqrt{3} = \frac{100}{x+1.6}$$

$$1.732 = \frac{100}{x+1.6}$$

$$x+1.6 = \frac{100}{1.732}$$

$$x = 57.73 - 1.6$$

$$x = 56.13$$

4. ขั้นสรุปคำตอบ

ดังนั้นตึกนี้สูง 56.13 เมตร

5. จงหาความยาวของเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมีฐานยาว 60 หน่วย และขนาดของมุมยอด เป็น 30 องศา

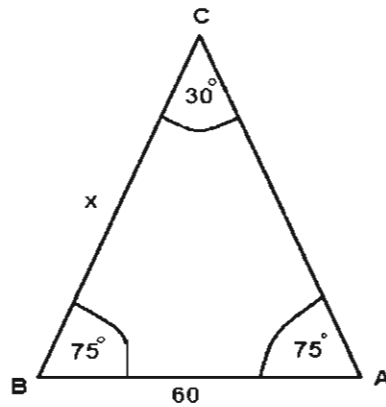
วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่ สามเหลี่ยมหน้าจั่วมีฐานยาว 60 หน่วย และขนาดของมุมยอด เป็น 30 องศา

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ ความยาวของเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

$$\text{จะได้ } \hat{A} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

ใช้กฎของไซน์ คือ

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB}$$

$$\frac{\sin 75^\circ}{x} = \frac{\sin 30^\circ}{60}$$

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา

$$\frac{\sin 75^\circ}{x} = \frac{\sin 30^\circ}{60}$$

$$x = \frac{60 \sin 75^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$x = 60 \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \right) \times \frac{2}{1}$$

$$x = \frac{60}{\sqrt{2}} (\sqrt{3} + 1)$$

4. ขั้นสรุปคำตอบ

$$\text{ดังนั้น เส้นรอบรูป } \triangle \text{ หน้าจั่ว ABC จะยาว } 2 \left[\frac{60}{\sqrt{2}} (\sqrt{3} + 1) \right] + 60 \text{ หน่วย}$$

$$\text{หรือ } 60\sqrt{6} + 60\sqrt{2} + 60 \text{ หน่วย}$$

6. สวนหย่อมรูปสามเหลี่ยมมีมุมหนึ่งขนาด 73° องศา ด้านประกอบมุมนั้นยาว 36 เมตร และ 51 เมตร จงหาว่าสวนหย่อมมีความยาวรอบรูปเท่าไร (กำหนด $\cos 73^\circ = 0.2924$)

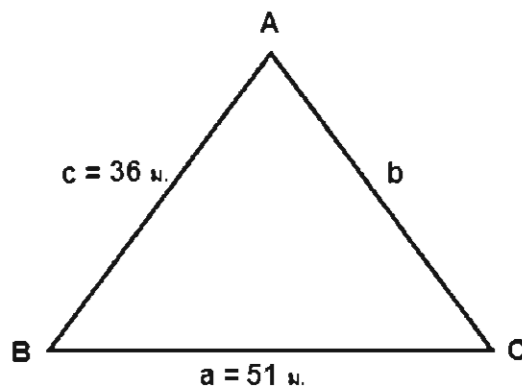
วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่ สวนหย่อมรูปสามเหลี่ยมมีมุมหนึ่งขนาด 73° องศา ด้านประกอบมุมนั้นยาว 36 เมตร และ 51 เมตร (กำหนด $\cos 73^\circ = 0.2924$)

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ ความยาวรอบรูปของสวนหย่อม

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

จากรูปจะใช้กฎโคไซน์ คือ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา

$$\begin{aligned} b^2 &= 51^2 + 36^2 - 2(51)(36) \cos 73^\circ \\ &= 3897 - 3672(0.2924) \end{aligned}$$

$$b^2 = 2823.31$$

$$b \approx 53.13$$

4. ขั้นสรุปคำตอบ

ดังนั้น สวนหย่อมมีความยาวรอบรูป $36 + 51 + 53.13 = 140.13$ เมตร

เฉลยแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
รหัสวิชา ค 32201 รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ชื่อ.....สกุล.....ชั้น.....เลขที่

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำทุกข้ออย่างละเอียด

1. จงแสดงการพิสูจน์ว่า

$\cot A \sin 2A = 1 + \cos 2A$ พร้อมอธิบาย แสดงแนวคิดหรือให้เหตุผลประกอบ

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \cot A \sin 2A &= \frac{\cos A}{\sin A} (2 \sin A \cos A) \quad (\text{เนื่องจาก } \sin 2A = 2 \sin A \cos A) \\ &= \cos A (2 \cos A) \\ &= 2 \cos^2 A \quad (\text{เนื่องจาก } \cos 2A = 2 \cos^2 A - 1) \\ &= \cos 2A + 1 \end{aligned}$$

2. จงแสดงการพิสูจน์ว่า $\arctan x + \arctan(-x) = 0$ พร้อมอธิบายแสดงแนวคิดประกอบ หรือให้เหตุผลประกอบ

วิธีทำ

$$\text{ให้ } \arctan x = \theta$$

$$\text{ดังนั้น จะได้ } \tan\theta = x \quad \text{เมื่อ } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{และให้ } \arctan(-x) = \alpha$$

$$\text{ดังนั้น จะได้ } \tan\alpha = -x \quad \text{เมื่อ } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{จะได้ว่า } \tan(\theta + \alpha) = \frac{\tan\theta + \tan\alpha}{1 - \tan\theta\tan\alpha} \quad (\text{เนื่องจาก } \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B})$$

$$\text{เมื่อ แทนค่า } \tan\theta = x \text{ และ } \arctan(-x) = \alpha$$

$$\text{จะได้ } \tan(\theta + \alpha) = \frac{x + (-x)}{1 - x(-x)} = 0 \quad \text{เมื่อ } -\frac{\pi}{2} < \theta + \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{เนื่องจาก } \tan(\theta + \alpha) = 0 \text{ เมื่อ } (\theta + \alpha) = 0^\circ \quad \text{และ } -\frac{\pi}{2} < 0^\circ < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ดังนั้น } \arctan x + \arctan(-x) = 0$$

3. จงแสดงการพิสูจน์ว่า $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \tan\theta$ พร้อมทั้งอธิบายแสดงแนวคิด หรือให้เหตุผลประกอบ

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} &= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \left(\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta} \right) \\
 &= \frac{1}{\cos\theta} - \left[\frac{\cos\theta - \cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta} \right] \\
 &= \frac{1}{\cos\theta} - \left[\frac{\cos\theta - \cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta} \right] \quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1) \\
 &= \frac{\cos\theta}{\cos\theta} \left(\frac{1}{\cos\theta} \right) - \left[\frac{\cos\theta - \cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta} \right] \\
 &= \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} - \left[\frac{\cos\theta - \cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta} \right] \\
 &= \frac{\cos\theta - \cos\theta + \cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta} \\
 &= \frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta} \\
 &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
 &= \tan\theta
 \end{aligned}$$

4. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ พร้อมอธิบายแสดงแนวคิด หรือให้เหตุผลประกอบ “ค่าทั่วไปของ θ ที่สอดคล้องกับสมการ $\tan\theta\sin\theta + \tan\theta = 0$ คือ $2n\pi$ หรือ $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม”

วิธีทำ

$$\text{จาก } \tan\theta\sin\theta + \tan\theta = 0$$

$$\text{จะได้ } \tan\theta(\sin\theta + 1) = 0$$

$$\text{จะได้ } \tan\theta = 0$$

$$\text{แสดงว่า } \theta = 0, \pi$$

$$\text{หรือ } \sin\theta + 1 = 0$$

$$\text{นั่นคือ } \sin\theta = -1$$

$$\text{แสดงว่า } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{แต่ } \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ ใช้ไม่ได้ เพราะ } \tan\frac{3\pi}{2} \text{ ไม่สามารถหาค่าได้}$$

จะได้ว่า ค่าทั่วไปที่สอดคล้องกับสมการ $\tan\theta\sin\theta + \tan\theta = 0$ คือ 0 และ $n\pi$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

แสดงว่า ข้อความข้างต้นไม่เป็นจริง

5. ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC มีความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า a เท่ากับ 32, b เท่ากับ 24 และ $\hat{A} = 30^\circ$ จงหาว่าขนาดของมุม B มีกี่ค่าพร้อมทั้งอธิบายแสดงแนวคิด หรือให้เหตุผลประกอบ

วิธีทำ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{32} = \frac{\sin B}{24}$$

$$\sin B = \frac{24(\sin 30^\circ)}{32}$$

$$\sin B = \frac{24 \times \left(\frac{1}{2}\right)}{32}$$

$$\sin B = 0.375$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{B} \approx 22^\circ$$

$$\text{หรือ } \hat{B} \approx 180^\circ - 22^\circ = 158^\circ$$

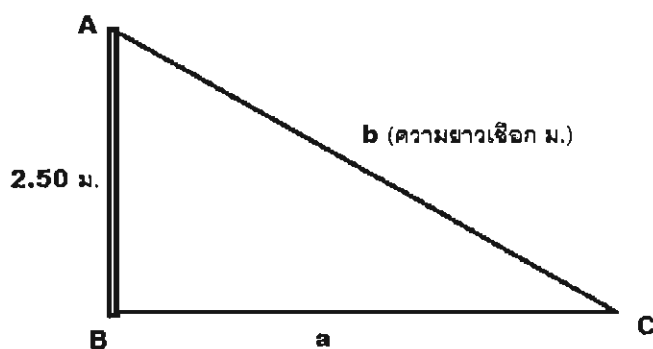
-เมื่อมุม $\hat{B} \approx 22^\circ$ ได้มุม $\hat{C} \approx 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}$ หรือ $\hat{C} \approx 180^\circ - 22^\circ - 30^\circ \approx 128^\circ$ (เนื่องจากมุมภายในสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180°)

-เมื่อมุม $\hat{B} \approx 158^\circ$ รวมกับมุม $\hat{A} = 30^\circ$ จะได้ 188° ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ มุมภายในสามเหลี่ยมรวมกันได้เพียง 180°

ดังนั้นมุม \hat{B} จึงมีเพียง 1 ค่าเท่านั้น คือ 22°

6. เสาต้นหนึ่งผูกเชือก 1 เส้นจากยอดเสามายังพื้น โดยเชือกผูกทำมุม 50 องศา กับพื้น เสาต้นนี้สูง 2.50 เมตร ถ้าต้องการทราบความยาวของเชือกโดยประมาณควรใช้กฎของโคไซน์หรือไซน์ในการคำนวณหาความยาวนี้เพราะเหตุใด จงแสดงแนวคิด หรือให้เหตุผลประกอบ
(กำหนด $\sin 50^\circ = 0.7660$)

วิธีทำ



ควรใช้กฎของไซน์ในการคำนวณหาความยาวนี้ เพราะเราทราบความยาวด้านเพียง 1 ด้าน
ถ้าจะใช้กฎของโคไซน์ได้เราต้องทราบความยาวด้านอย่างน้อย 2 ด้าน
จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\sin B}{b} &= \frac{\sin C}{c} \\ \frac{\sin 90^\circ}{b} &= \frac{\sin 50^\circ}{2.50} \\ \frac{1}{b} &= \frac{0.7660}{2.50} \\ b &= \frac{2.50}{0.7660} \\ b &\approx 3.26 \end{aligned}$$

ดังนั้น เชือกยาว 3.26 เมตร โดยประมาณ

ภาคผนวก ค

- ค่าดัชนีความสอดคล้อง ของแผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
- ค่าดัชนีความสอดคล้อง ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
 - ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่น ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
 - ค่าดัชนีความสอดคล้อง ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
 - ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่น ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
 - คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ตารางที่ ค-1 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ที่มีต่อ

ความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

แผนที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ					IOC
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4	คนที่ 5	
1	0	+1	+1	+1	+1	0.8
2	0	+1	+1	+1	+1	0.8
3	0	+1	+1	+1	+1	0.8
4	-1	+1	+1	+1	+1	0.6
5	0	+1	+1	+1	+1	0.8
6	+1	+1	+1	+1	+1	1.00

ตารางที่ ค-2 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา

ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

ข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ					IOC
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4	คนที่ 5	
1	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
2	0	+1	+1	+1	+1	0.80
3	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
4	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
5	0	+1	+1	+1	+1	0.80
6	0	+1	+1	+1	+1	0.80
7	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
8	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
9	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
10	+1	+1	+1	+1	+1	1.00

ตารางที่ ค-2 (ต่อ)

ข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ					IOC
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4	คนที่ 5	
11	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
12	+1	+1	+1	+1	+1	1.00

ตารางที่ ค-3 ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัด
ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ข้อที่	ค่าความยากง่าย	ค่าอำนาจจำแนก
1	0.69	0.33
2	0.74	0.35
3	0.70	0.32
4	0.49	0.23
5	0.65	0.57
6	0.64	0.73
ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ 0.86		

ตารางที่ ค-4 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผล
ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

ข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ					IOC
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4	คนที่ 5	
1	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
2	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
3	+1	+1	+1	+1	+1	1.00

ตารางที่ ก-4 (ต่อ)

ข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ					IOC
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4	คนที่ 5	
4	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
5	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
6	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
7	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
8	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
9	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
10	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
11	+1	+1	+1	+1	+1	1.00
12	+1	+1	+1	+1	+1	1.00

ตารางที่ ก-5 ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัด

ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ข้อที่	ค่าความยากง่าย	ค่าอำนาจจำแนก
1	0.71	0.29
2	0.70	0.40
3	0.43	0.23
4	0.60	0.75
5	0.56	0.52
6	0.52	0.25
ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ 0.76		

ตารางที่ ค-6 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คนที่	คะแนนความสามารถใน การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (คะแนนเต็ม 42 คะแนน)	คะแนนความสามารถใน การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (คะแนนเต็ม 24 คะแนน)
1	40	23
2	36	17
3	37	16
4	35	15
5	31	17
6	35	12
7	36	22
8	40	21
9	33	20
10	36	18
11	39	21
12	34	15
13	33	21
14	36	15
15	30	19
16	37	22
17	38	23
18	38	20
19	35	13
20	31	19
21	41	21
22	36	17
23	36	17

ตารางที่ ค-6 (ต่อ)

คนที่	คะแนนความสามารถใน การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (คะแนนเต็ม 42 คะแนน)	คะแนนความสามารถใน การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (คะแนนเต็ม 24 คะแนน)
24	30	17
25	36	18
26	35	21
27	37	21
28	34	17
29	33	18
30	38	22
31	19	11
32	37	20
33	13	7
34	34	21
35	40	22
36	30	17
37	32	20
38	34	15
39	36	14
40	34	15
41	37	17
42	20	11
43	21	12
44	30	23
45	33	14
46	36	18
47	24	20

ตารางที่ ก-6 (ต่อ)

คนที่	คะแนนความสามารถใน การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (คะแนนเต็ม 42 คะแนน)	คะแนนความสามารถใน การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (คะแนนเต็ม 24 คะแนน)
48	31	22
49	25	18
50	36	22
คะแนนเฉลี่ย	33.36	17.94
ร้อยละ	79.43	74.75

ภาคผนวก ง

- ผลการวิเคราะห์ข้อมูลของการวิจัยโดยใช้โปรแกรม spss

1. ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากการทำแบบทดสอบ

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
VAR00001	50	33.3600	5.73126	.81052

One-Sample Test

	Test Value = 29.4					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
VAR00001	4.886	49	.000	3.96000	2.3312	5.5888

2. ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จากการทำแบบทดสอบ

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
VAR00001	50	17.9400	3.67235	.51935

One-Sample Test

	Test Value = 16.8					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
VAR00001	2.195	49	.033	1.14000	.0963	2.1837

ภาคผนวก จ

- ตัวอย่างการทำใบกิจกรรมและการทำแบบฝึกหัดของนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

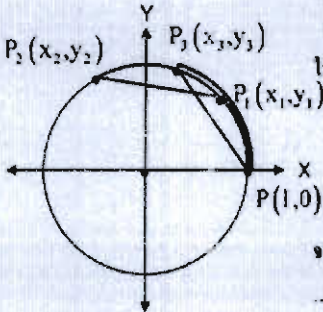
ใบกิจกรรมที่ 1.1

เรื่อง การหาฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ชื่อ น.ส. กฤษดา นามสกุล อาภาศอาษา ชั้น ม.5/7 เลขที่ 1

ปฏริยเอง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาและทำกิจกรรมที่กำหนดให้

1. การหาความสัมพันธ์ของ $\cos(A-B)$ และ $\cos(A+B)$



1.1 จงสรุป กำหนดวงกลมหนึ่งหน่วยบนระนาบพิกัดฉาก

และให้ส่วนโค้ง $PP_2=A$, $PP_1=B$

ให้ P_3 เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ห่อให้ส่วนโค้ง PP_3 เท่ากับส่วนโค้ง P_1P_2

ดังนั้น $PP_3=P_1P_2=A-B$

และจะได้ว่า $|PP_3| = |P_1P_2|$

$$\sqrt{(x_3-1)^2+(y_3)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

จงแก้สมการ $\sqrt{(x_3-1)^2+(y_3)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

.....

$x_3 = \dots\dots\dots$ (1)

เนื่องจากจุด (x_1, y_1) , (x_2, y_2) และ (x_3, y_3) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว B, A, A-B หน่วย ตามลำดับ จะได้

$x_1 = \cos B$, $y_1 = \sin B$

$x_2 = \cos A$, $y_2 = \sin A$

$x_3 = \cos(A-B)$

ดังนั้น จากสมการ (1) จะได้ $\cos(A-B) = \dots\dots\dots$

ถ้าถอยนำค่า $\cos(A-B)$ ไปหาค่าของ $\cos(A+B)$ จะได้ดังนี้

1.2 $\cos(A+B) = \cos[A-(-B)]$

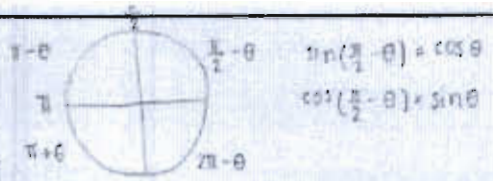
$= \cos A \cos(-B) - \sin A \sin(-B)$

$= \cos A \cos B - \sin A \sin B$

สรุปเป็นสูตรได้ว่า $\cos(A-B) = \dots\dots\dots$

$\cos(A+B) = \dots\dots\dots$

2. การหาความสัมพันธ์ของ $\sin(A-B)$ และ $\sin(A+B)$



เนื่องจาก $\sin(A+B) = \cos\left[\frac{\pi}{2}-(A+B)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-A\right)-B\right]$

$$\begin{aligned} \text{ผลคูณ} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cos B + \sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\sin B \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

3. การหาความสัมพันธ์ของ $\tan(A-B)$ และ $\tan(A+B)$

เนื่องจาก $\tan(A-B) = \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B + \sin A \sin B} = \frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B} \\ &= \frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B} = \tan A - \tan B \end{aligned}$$

ดังนั้น $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$


จากค่าของ $\cos(A-B)$, $\cos(A+B)$, $\sin(A-B)$ และ $\sin(A+B)$ เมื่อนำมาบวกหรือลบกันจะให้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 2\sin A \cos B &= \sin(A+B) + \sin(A-B) \\ 2\cos A \sin B &= \sin(A+B) - \sin(A-B) \\ 2\cos A \cos B &= \cos(A+B) + \cos(A-B) \\ 2\sin A \sin B &= \cos(A-B) - \cos(A+B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 2A &= 2\sin A \cos A \\ \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ \cos 2A &= 2\cos^2 A - 1 \\ \cos 2A &= 1 - 2\sin^2 A \\ \tan 2A &= \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B &= 2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B &= 2\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B &= 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B &= -2\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

4. จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

<p>1. $\cos 15^\circ = \dots$</p> $= \cos(45^\circ - 30^\circ)$ $= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$ $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ $= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	<p>3. $\tan 15^\circ = \dots$</p> $= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$ $= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$
<p>2. $\sin \frac{17\pi}{12} = \dots$</p> $= \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{12}\right)$ $= \sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{11\pi}{12}$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$	<p>4. $\sin \frac{7\pi}{12} = \dots$</p> $= \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3}$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
<p>5. $\sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{18} + \cos \frac{\pi}{9} \sin \frac{\pi}{18} = \dots$</p> $= \sin \left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{18}\right)$ $= \sin \left(\frac{2\pi}{18} + \frac{\pi}{18}\right)$ $= \sin \left(\frac{3\pi}{18}\right)$ $= \sin \left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	<p>10. $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = \dots$</p> $= 2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2}$ $= 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$
<p>6. $\cos 65^\circ \cos 20^\circ + \sin 65^\circ \sin 20^\circ = \dots$</p> $= \cos(65^\circ - 20^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	<p>11. $\cos 105^\circ + \cos 195^\circ = \dots$</p> $= 2 \cos \frac{105^\circ + 195^\circ}{2} \cos \frac{105^\circ - 195^\circ}{2}$ $= 2 \cos 150^\circ \cos (-45^\circ) = 2 \cos 150^\circ \cos 45^\circ$ $= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}$
<p>7. $6 \sin 75^\circ \cos 15^\circ = \dots$</p> $= 3(2 \sin 75^\circ \cos 15^\circ)$ $= 3(\sin(75^\circ + 15^\circ) + \sin(75^\circ - 15^\circ))$ $= 3(\sin 90^\circ + \sin 60^\circ)$ $= 3\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$	<p>12. กำหนด $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{4}{5}$ เมื่อ A และ B อยู่ใน ภาคต้นที่ 1 จงหา</p> <p>12.1 $\sin(A+B)$</p>  $= \sin A \cos B + \cos A \sin B$ $= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$ $= \frac{12}{25} + \frac{12}{25} = \frac{24}{25}$
<p>8. $4 \sin 75^\circ \sin 15^\circ = \dots$</p> $= 2(2 \sin 75^\circ \sin 15^\circ)$ $= 2(\cos(75^\circ - 15^\circ) - \cos(75^\circ + 15^\circ))$ $= 2(\cos 60^\circ - \cos 90^\circ)$ $= 2\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$	<p>12.2 $\sin(A-B)$</p> $= \sin A \cos B - \cos A \sin B$ $= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$ $= \frac{12}{25} - \frac{12}{25} = 0$
<p>9. $\frac{\cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ} = \dots$</p> $= \frac{\cos 10^\circ + \sin(30^\circ + 10^\circ)}{\sin(40^\circ + 30^\circ)}$ $= \frac{\cos 10^\circ + \sin 30^\circ \cos 10^\circ + \cos 30^\circ \sin 10^\circ}{\sin 70^\circ}$ $\frac{\cos 10^\circ + \frac{1}{2} \cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ}{\sin 70^\circ}$ $\frac{\frac{3}{2} \cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ}{\sin 70^\circ}$ $\frac{\frac{3}{2} \cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ}{\frac{3}{2} \cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ} = 1$	<p>12.2 $\sin(A-B)$</p> $= \sin A \cos B - \cos A \sin B$ $= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$ $= \frac{12}{25} - \frac{12}{25} = 0$



ใบกิจกรรมที่ 1.2

เรื่อง การแก้ปัญหาและการให้เหตุผลเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ
ของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ชื่อ.....นามสกุล.....ชั้น ม.5/.....เลขที่.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

โจทย์ข้อที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูปหนึ่ง มีด้าน AB ยาวเท่ากับ 9 หน่วย ด้าน BC ยาวเท่ากับ 12 หน่วย และด้าน AC ยาวเท่ากับ 15 หน่วย จงหาค่า $\cos(A-C)$, $\sin(A+C)$ และ $\tan(A-C)$

วิธีทำ

1. ชี้แจงทำความเข้าใจปัญหา

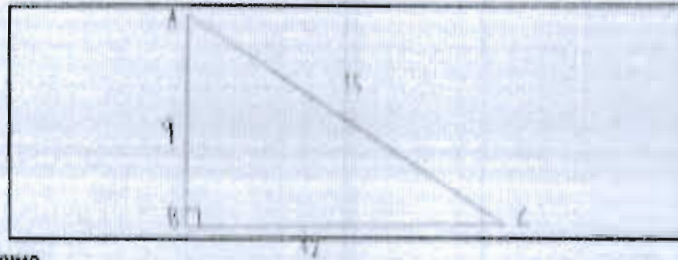
สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ได้แก่

AB = 9 หน่วย BC = 12 หน่วย AC = 15 หน่วย

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ

$\cos(A-C)$, $\sin(A+C)$, $\tan(A-C)$

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้สามารถแสดงเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้



2. ชี้นำวางแผนการแก้ปัญหา

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้หรือจากรูปสามเหลี่ยมทำให้เราทราบว่า

$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{15}$ $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{15}$ $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{9}$

$\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{15}$ $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{15}$ $\tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{9}{12}$

3. ขั้นตอนในการแก้ปัญหา คือหาค่า $\cos(A-C)$, $\sin(A+C)$ และ $\tan(A-C)$

จะได้ $\cos(A-C) = \cos A \cos C + \sin A \sin C$

$= (\frac{9}{15})(\frac{12}{15}) + (\frac{12}{15})(\frac{9}{15})$

$= \frac{108}{225} + \frac{108}{225} = \frac{216}{225} = \frac{24}{25}$

$\sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$

$= (\frac{12}{15})(\frac{12}{15}) + (\frac{9}{15})(\frac{9}{15})$

$= \frac{144}{225} + \frac{81}{225} = \frac{225}{225} = 1$

$\tan(A-C) = \frac{\sin A \cos C - \cos A \sin C}{\cos A \cos C + \sin A \sin C}$

$= \frac{(\frac{12}{15})(\frac{12}{15}) - (\frac{9}{15})(\frac{9}{15})}{\frac{24}{25}} = \frac{144 - 81}{225} \cdot \frac{25}{24} = \frac{63}{225} \cdot \frac{25}{24} = \frac{7}{24}$

4. ขั้นสรุปคำตอบ

ดังนั้น $\cos(A-C) = \frac{24}{25}$, $\sin(A+C) = 1$ และ $\tan(A-C) = \frac{7}{24}$

โจทย์ข้อที่ 2 จงแสดงการพิสูจน์ว่า $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ พร้อมอธิบายแสดงแนวคิด หรือให้เหตุผลประกอบ

วิธีทำ จาก $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

ดังนั้น $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

จาก $\cos(2A) = \cos(A+A)$

$$= \cos A \cos A - \sin A \sin A \quad (\text{เนื่องจาก } \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B)$$

$$= \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A \quad (\text{เนื่องจาก } \cos^2 A = 1 - \sin^2 A)$$

$$= 1 - 2\sin^2 A$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(2A) = 1 - 2\sin^2 A$$